8. cvičení z Matematiky 2

11.-15. dubna 2016

8.1 Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Hledáme sice jen kladná čísla, ale pro využití věty o nabytí maxima (a minima) spojité funkce je potřeba pracovat s množinou, která je *uzavřená* (a omezená). Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \ \&\ x + y + z = 100\},$$

(což je trojúhelník i s okraji), tj. hledáme *nezáporná* čísla. Množina A je zřejmě uzavřená a omezená.

Vyšetření rozdělíme na obvyklý vázaný extrém v otevřené množině

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\},$$

tedy na $A \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$ s vazbou $\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$ (trojúhelník bez okrajů) a na případ $A \setminus U$ (okraje trojúhelníka).

Na okrajích trojúhelníka je funkce f nulová a zřejmě tu nabývá svého minima (protože na zbytku množiny A je f nenulová).

Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in A \cap U$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100,$$

takže $a = \frac{100}{3}(1, 1, 1)$ a $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$ a tento bod je tak jediným bodem maxima funkce f na A.

8.2 Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Řešení:
Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x,y,z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x+y)(5-x-y) = 8$$

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x,y,z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} \ \ \text{a} \ \ \mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} \ \ \text{jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} = (1,1,1)$

$\mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = (y+z, z+x, x+y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y + z = z + x = x + y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:

Pro bod $a = (x,y,z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = \mathrm{grad}(f)_{|a} = \lambda \cdot \mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} + \mu \cdot \mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = \lambda(1,1,1) + \mu(y+z, z+x, x+y)$$

a

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda - \mu(y+z)$$

$$zx = \lambda - \mu(z+x)$$

dostaneme $z(y-x) = \mu(y-x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostaveme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \quad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

8.3 Na elipse $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p: 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:
Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x, y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$ (pro $\mathbb{R}^2$ je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v $\mathbb{R}^3$ má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovine ρ. Vzdálenost bodu $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right|.$$

Protože bod b je v rovině ρ, platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

  $$g(x, y) = 10 \cdot \Big(f(x, y)\Big)^2 = (3x + y - 9)^2$$

  (snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $3x + y - 9$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

  $$h(x, y) = 3x + y - 9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 (= 0)$ je zřejmě $\operatorname{grad}(\Phi) = (\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}) \neq 0$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(3,\ 1) = \operatorname{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 3 \cdot \lambda\frac{2y}{9},$$

tedy $\lambda = 0$ nebo $y = \frac{3}{4}x$.

Pokud $\lambda = 0$, pak platí $3x + y - 9 = 0$ a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p, ktery je ale prázdný.

Takže zbývá případ $y = \frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{(\frac{3}{4}x)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x,y) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

(2) Použijeme "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

Tvrzení: Pokud je množina M (daná vazbou)

- *uzavřená,*
- *omezená* a
- *má tečny ve všech svých bodech,*

pak body z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a = (x,y) \in M$ je gradientem funkce Φ. Hledáme tedy body $a = (x,y) \in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \cdot (3,1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y = \frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

Poznámka: Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M, pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale *NENÍ uzavřená*: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je formálně z postupu získali).

- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale *NENÍ omezená*: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale *NEMÁ tečny ve všech svých bodech*: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník) (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).

(3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x, y) a (u, v) jako

$$h(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a $3u + v - 9 = 0$. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dve vazby

$$\Phi_1(x, y, u, v) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

a

$$\Phi_2(x, y, u, v) = 3u + v - 9$$

s gradienty

$$\mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right)$$

$$\mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = (0, 0, 3, 1)$$

kde $a = (x, y, u, v)$. Označme si

$$K = \{a \in \mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \&\ \Phi_2(a) = 0\}.$$

Pro body $a \in K$ jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(2(x-u), 2(y-v), 2(u-x), 2(v-y)\Big) = \mathrm{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right) + \mu \cdot (0, 0, 3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{a} \quad 3u + v - 9 = 0$$

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 2(x - u) = -3\mu$$

$$\lambda\frac{2y}{9} = 2(y - v) = -\mu$$

tedy opět rovnici $\lambda\left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{3}\right) = 0$, kde případ $\lambda = 0$ opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(x_2, y_2) = -\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

a pomocí rovnice $x - u = 3(y - v)$ dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{27\sqrt{5} - 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} + 27}{10\sqrt{5}}\right)$$

$$(u_2, v_2) = \left(\frac{27\sqrt{5} + 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} - 27}{10\sqrt{5}}\right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdálenosti) bodů $a_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ platí

$$h(a_1) < h(a_2).$$

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro $a \in K$ a $\|a\| \to \infty$ jdou hodnoty $h(a)$ také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ byly hodnoty funkce h větší než např. $h(a_2)+1$. A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině $K \cap B$ bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině $K \cap \partial B$ budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě $h(a_2) + 1$ (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$).
- Na množině $K \cap B^\circ$ (díky otevřenosti množiny B°) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body a_1 a a_2 (které se evidentně musí nacházet v $K \cap B^\circ$ díky svým funkčním hodnotám$h(a_1) < h(a_2) < h(a_2) + 1$).
- Absolutní minimum funkce h na množině $K \cap B$ se tedy NEMŮŽE nacházet na "okraji"$K \cap \partial B$ protože tam je funkce "moc velká"a může to tedy být jedině bod a_1. Současně i na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ je funkce "moc velká", a bod a_1 je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K.

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce "v nekonečnu roste do nekonečna".

A co bod a_2? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

8.4 Najděte vzdálenost paraboly $M: \ y = x^2$ od přímky $p: \ y = x - 2$.

Řešení:
Můžeme použít některý z předchozích postupů, ale musíme si uvědomit, že parabola není omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p i zde "v nekonečnu roste do nekonečna". Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p:\ x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce

$$\rho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$