9. cvičení z Matematiky 2

18. - 22. dubna 2016

9.1 Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(i) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$

(ii) $\int\limits_0^{1} \int\limits_0^{x} f(x,y)\ dy\ dx + \int\limits_1^{2} \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx$

(iii) $\int\limits_0^{2a} \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\ dy\ dx$, kde $a > 0$ je parametr.

Řešení:
Použijeme **Fubiniho větu:** Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce (tj. funkce, kterou má smysl vůbec integrovat, např. spojitá) a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_D |f|\ dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_D f\ dS$ a platí

$$\int\limits_{\pi_2(D)} \Big(\int\limits_{(\mathbb{R}\times\{y\})\cap D} f(x,y)\ dx \Big)\ dy = \iint\limits_D f\ dS = \int\limits_{\pi_1(D)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap D} f(x,y)\ dy \Big)\ dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

na $D = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\ dy = [-\arctan(y)]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládame, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(i) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi \ \&\ 0 \le y \le \sin x\}.$$

Máme

$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x \rangle.$$

Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \le \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^{1} \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(ii) Základní oblasti integrace jsou

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \&\ 0 \le y \le x\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \ \&\ 0 \le y \le 2 - x\}.$$

Množiny D_1 a D_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integralu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $D = D_1 \cup D_2$.

Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

$$\iint_{D_1} f\ dS \ + \ \iint_{D_2} f\ dS = \iint_{D_1 \setminus D_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint_{D_1 \cap D_2} f\ dS \ + \ \iint_{D_2 \setminus D_1} f\ dS$$

Takže $\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle y, 2 - y \rangle$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^{1} \int_0^{x} f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^{2} \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^{1} \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(iii) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2a \ \&\ \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}\}.$$

Oblast je tedy se shora omezená parabolou $y^2 = 2ax$ a že zdola polovinou kružnice $2ax - x^2 = y^2$ (neboli ekvivalentně $(x-a)^2 + y^2 = a^2$). Rozdělíme si ji na tři části (tento návod poskytuje obrázek)

$$D_1 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq a\}$$

$$D_2 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq a \ \ \& \ \ x \leq a\}$$

a

$$D_3 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq a \ \ \& \ \ x \geq a\}.$$

Teď si oblasti D_i vyjádříme podle řezu v proměnné x (pomocí křivek $y^2 = 2ax$ a $(x-a)^2 + y^2 = a^2$):

D_1 :

$$a \leq y \leq 2a, \qquad \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a$$

D_2 :

$$0 \leq y \leq a, \qquad \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

D_3 :

$$0 \leq y \leq a, \qquad a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2a$$

Takže výsledek je

$$\iint\limits_D f \, dS = \iint\limits_{D_1} f \, dS \ + \iint\limits_{D_2} f \, dS \ + \iint\limits_{D_3} f \, dS =$$

$$= \int\limits_a^{2a} \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a} f(x,y) \, dx \, dy \ + \int\limits_0^a \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) \, dx \, dy \ + \int\limits_0^a \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) \, dx \, dy \ .$$

9.2 Určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál:

(i) $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} \, dy \, dx$

(ii) $\int\limits_0^8 \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy \, dx}{y^4+1}$

Řešení:
(i) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \ \& \ y \neq 4\}.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině D není omezená.

(**Proč:** Množina D je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku D, tedy vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=4-\lambda x^2, \ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.)$$

Není tedy jasné, jestli je $\iint\limits_D |f|\ dS < \infty$ a jestli tedy vůbec můžeme použít Fubiniovu větu o záměně integrace. Pomůžeme si teď dodatkem:

Věta: Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : D \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce a
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný a oba se rovnají (a funkce má dvojný integrál $\iint\limits_E f\ dS$).

Kromě toho ještě připomeňme, jak je definován integrál $\iint\limits_E f\ dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n} |f|\ dS =: \iint\limits_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Máme tedy

$$\pi_2(D) = \langle 0, 4)$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, \sqrt{4-y}\rangle.$$

Dostáváme tak

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx = \int\limits_0^4 \Big(\int\limits_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx \Big)\ dy = \int\limits_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4} \Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8-1}{4}.$$

(ii) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 8\ \&\ \sqrt[3]{x} \le y \le 2\},$$

takže

$$\pi_2(D) = \langle 0, 2\rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, y^3\rangle.$$

Dostáváme tak

$$\int\limits_0^8 \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{y^4+1} = \int\limits_0^2 \Big(\int\limits_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\ dx \Big)\ dy = \int\limits_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

9.3 Vypočítejte integrál

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\ dx\ dy$$

přechodem do polárních souřadnic.

Řešení:
Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2 \ \&\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \ \&\ x^2+y^2 \le 4\},$$

tedy čtvrtkruh.

Použijeme **Větu o substituci:** Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, $f : U \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce s konečným integrálem a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U) a
- množina $U \setminus U^\circ$ ($\subseteq \partial U$) ma *nulovou míru* (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový; obvykle to jsou křivky, úsečky atd, které mají nulový obsah.)

Pak

$$\iint_{\Phi(U)} f\ dS = \iint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\ dS.$$

Polární souřadnice jsou určeny zobrazením $\Phi : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, kde $\Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

Máme $\Phi'_{|(r,\varphi)} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ a $\det \Phi'_{|(r,\varphi)} = r$. Protože D je čtvrtina kruhu, snadno ji zparametrizujeme $D = \Phi(U)$, kde $U = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Na D° je Φ zřejmě prosté a spojitě diferencovatelné a množina ∂D se skládá ze dvou úseček a oblouku kružnice, což jsou množiny míry nula. Celkem tak dostáváme:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\ dx\ dy = \iint_{D=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dS =$$

$$= \iint_U r^2 \cdot r\ dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^2 r^3\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_{r=0}^{r=2}\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\ d\varphi = 2\pi.$$

9.4 Vypočítejte integrál

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:

V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ \& \ 0 \leq r \leq 1 + \cos\varphi\}$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2 + y^2}\ dS = \iint\limits_{U} r \cdot r\ dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{1+\cos\varphi} r^2\ dr \Big)\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi}\ d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Pro jednotlivé integrály jsme použili vztahy (pro $n \geq 0$):

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = \int\limits_{0-\frac{\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = \Big[\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}\Big] =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1}(\alpha + \frac{\pi}{2})\ d\alpha = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1}\alpha\ d\alpha = 0.$$

(plyne z periodicity a lichosti funkcí) a dále podobně:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi$$

a současně

$$\int\limits_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$$

tedy

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$