1. cvičení z Matematické analýzy 2

20.-24. února 2017

1.1 Ukažte, že objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ je

$$|u \cdot (v \times w)| = |\det(u, v, w)| \ .$$

Řešení:

- *obsah podstavy* $= \|v \times w\|$
- *výška* $= |u \cdot n|$, kde n je jednotkový vektor kolmý k podstavě (např. $n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$).

Takže

$$\textit{objem rovnoběžnostěnu} = \|v \times w\| \cdot |u \cdot n| = \|v \times w\| \cdot \left| u \cdot \frac{v \times w}{\|v \times w\|} \right| = |u \cdot (v \times w)| = |\det(u, v, w)| \ .$$

1.2 Ukažte, že vzdálenost $\rho(A, \sigma)$ bodu $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ od roviny $\sigma : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ v $\mathbb{R}^3$ je

$$\rho(A, \sigma) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Řešení:
Normálový vektor roviny je $n = (\alpha, \beta, \gamma)$. Zvolme si nějaký bod $B \in \mathbb{R}^3$ v rovině σ. Vzdálenost bodu $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny σ je dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - B$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left| (A - B) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right|.$$

Protože bod B je v rovině σ, platí $n \cdot (B - O) = -\delta$, kde $O = (0, 0, 0)$ je počátek soustavy souřadnic. Můžeme tak psát

$$\left| (A - B) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \frac{|(A - O) \cdot n - (B - O) \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(A - O) \cdot n - \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

1.3 Pro danou funkci f najděte její definiční obor D_f a pro tuto množinu určete její vnitřek, uzávěr a hranici:

(a) $f(x, y) = \ln\left(x \ln(y + x)\right)$,

(b) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$,

(c) $f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$,

(d) $f(x,y) = \sqrt{\frac{\cos y}{\sin x}}$,

(e) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$,

(f) $f(x,y) = \frac{\arcsin(4-x^2-y^2)+\arcsin(2xy)}{xy}$.

1.4 Určete izolované a hromadné body množiny $M = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Řešení:
Všechny body množiny M jsou izolované. Hromadné body jsou $(0,0)$ a body $(0, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, 0)$ kde $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Určete vnitřek, hranici a uzávěr množiny $M = \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
uzávěr: $\overline{M} = \mathbb{R}^2$; vnitřek: $M^\circ = \emptyset$; hranice: $\partial M = \mathbb{R}^2$.

1.6 Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta: Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je otevřená

  (protože je *vzorem* otevřeného intervalu $(0, +\infty)$) a

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená

  (protože je *vzorem* uzavřeného intervalu $\langle 0, +\infty)$).

Najděte příklad spojité funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kdy pro

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 0\}$$

je

$$\overline{A} \subsetneqq B \quad \text{a} \quad B^\circ \supsetneqq A$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ)

K zamyšlení: Co bychom měli ještě požadovat po funkci f, abychom mohli napsat rovnosti (pro uzávěr a/nebo pro vnitřek)? Nápověda: všimněte si, jak se chová funkce f v problematických bodech.

Řešení:
Např. můžeme zvolit funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x \in \langle -1, 0\rangle, \\ -(x+1)^2, & x < -1\ . \end{cases}$$

Pak je $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ a $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1\}$. Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

Poznámka: Později se dozvíme tzv. *větu o implicitní funkci.* Z té pak bude plynout toto tvrzení:
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Pokud pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, je $f'(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \neq 0$, pak

- pro $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je
$$\overline{A} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$$
- a pro $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je
$$B^\circ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}.$$

V našem případě ale bohužel máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ 0, & x \in \langle -1, 0\rangle, \\ -2(x+1), & x < -1\ . \end{cases}$$

a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ a vidíme, že pokud je $x \in \langle -1, 0\rangle$, pak $f'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \Big(0, 0\Big)$. Výše uvedené tvrzení tedy nemůžeme použít.

1.7 Ukažte, že pro každé dvě množiny A, B v $\mathbb{R}^k$ platí:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Poznámka: Otevřené množiny si více "rozumí" se sjednocením (tj. $\cup$), protože sjednocení *libovolně* velkého systému otevřených množin je opět otevřená množina a naopak průnik (obecně) pouze *konečně* mnoha otevřených množin je otevřená množina.
Při operaci *vnitřku* ($A \mapsto A^\circ$) to ale zase na druhou stranu lépe funguje pro průnik (tj. $\cap$), viz bod (a) (tj. nastává tu rovnost obou stran na rozdíl od analogické situace pro sjednocení - viz příklad **1.8**).

Podobně, uzavřené množiny si více "rozumí" s průnikem (tj. $\cap$), protože průnik *libovolně* velkého systému uzavřených množin je zase uzavřená množina a naopak sjednocení (obecně) pouze *konečně* mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.
Při operaci *uzávěru* ($A \mapsto \overline{A}$) to ale zase na druhou stranu lépe funguje pro sjednocení (tj. $\cup$), viz bod (b) (tj. nastává tu rovnost obou stran na rozdíl od analogické situace pro průnik - viz příklad **1.8**).

Řešení:
(a)

$$x \in (A \cap B)^\circ \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A \;\wedge\; U_\varepsilon(x) \subseteq B \;\Leftrightarrow\; x \in A^\circ \cap B^\circ\ .$$

Pozor! Poslední implikace

$$(\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A \;\wedge\; U_\varepsilon(x) \subseteq B \;\Leftarrow\; x \in A^\circ \cap B^\circ$$

platí, protože zvolíme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ pro $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ a $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$.

(b)

$$x \in \overline{A \cup B} \;\Leftrightarrow\; (\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \;\vee\; U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A} \cup \overline{B}\,.$$

Pozor! Poslední implikace

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \;\vee\; U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \;\Rightarrow\; x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

platí, protože stačí sledovat jen nějakou posloupnost $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ jdoucí k nule např. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

1.8 Najděte příklady množin A, B v $\mathbb{R}^k$, pro které platí:

(a) $(A \cup B)^\circ \supsetneqq A^\circ \cup B^\circ$

(b) $\overline{A \cap B} \subsetneqq \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení:
Potřebujeme, aby množiny byly k sobě "přilepené". Takže v $\mathbb{R}$ např. $A = (0, 1\rangle$ a $B = (1, 2)$ a ve vyšších dimenzích to stačí jen kartézsky přenásobit třeba nějakým intervalem.