10. cvičení z Matematické analýzy 2

24. - 28. dubna 2017

10.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

(i)
$$\iiint\limits_E xyz \; dV,$$
kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(ii)
$$\iiint\limits_E y \; dV,$$
kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

(iii)
$$\iiint\limits_E xy \; dV,$$
kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

Řešení:
Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint\limits_E f \; dV = \iint\limits_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x, y, z) \; dz \Big) \; dS,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$ a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y. Případně:

$$\iiint\limits_E f \; dV = \int\limits_{\pi_1(E)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap\pi_{1,2}(E)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x, y, z) \; dz \Big) \; dy \Big) \; dx =$$

$$= \int\limits_{\pi_1(E)} \Big(\iint\limits_{(\{x\}\times\mathbb{R}^2)\cap E} f(x, y, z) \; dz \; dy \Big) \; dx$$

kde $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_1(x, y, z) = x$.

Průniky uvedené v integrálech nejsou nic jiného než jednorozměrné řezy příslušných množin, tj. "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup opakujeme (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.) Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_1(E)$).

(i) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le xy, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\;dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{xy} xyz\;dz\;dy\;dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\;dy\;dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^5 - x^{11}\;dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad 0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

I zde platí

$$\iiint\limits_E y\;dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{x+2y} y\;dz\;dy\;dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} y(x+2y)\;dy\;dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2}\;dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\;dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

(iii) Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\;dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y} \int\limits_0^{y-x} xy\;dz\;dx\;dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y} y^2x - x^2y\;dx\;dy = \int\limits_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y}\;dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\;dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

10.2 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a spočítejte integrály:

(i)

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{3-3x} \int\limits_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$$

(ii)

$$\int_0^{\pi} \int_{\ln(\sin y)}^{0} \int_{-\infty}^{z} e^x \, dx \, dz \, dy.$$

Řešení:
(i) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3-3x \quad \& \quad 0 \le z \le 3-3x-y$$

což je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ a $(0,0,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem (který bychom asi uměli spočítat i jinak, ale my ho pro procvičení zintegrujeme). Máme tedy

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3-3x-y) \, dy \, dx = \int_0^1 (3-3x)^2 - \frac{(3-3x)^2}{2} \, dx =$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 (1-x)^2 \, dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \, .$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le \pi \quad \& \quad \ln(\sin y) \le z \le 0 \quad \& \quad x \le z \, .$$

Průmět $\pi_{2,3}(E)$ množiny E do roviny yz je tvaru

$$\pi_{2,3}(E): \quad 0 \le y \le \pi \quad \& \quad \ln(\sin y) \le z \le 0$$

což vypadá jako hranaté obráceně písmeno U s nekonečnými zužujícími se konci. Celkově pak E vypadá jako nekonečně dlouhý U-profil, který je šikmo seříznutý směrem dolů.

Oblast E je sice nekonečna, ale funkce v integrandu je opět nezáporná, takže můžeme použít Fubiniho větu:

$$\int_0^{\pi} \int_{\ln(\sin y)}^{0} \int_{-\infty}^{z} e^x \, dx \, dz \, dy = \int_0^{\pi} \int_{\ln(\sin y)}^{0} e^z \, dz \, dy = \int_0^{\pi} \Big[e^z \Big]_{z=\ln(\sin y)}^{z=0} dy = \int_0^{\pi} (1 - \sin y) \, dy = \pi - 2 \, .$$

10.3 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(i)

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2) \; dz \; dy \; dx.$$

(ii)

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \; dz \; dy \; dx \, .$$

Řešení:
(i) Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \leq 2 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \leq 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \leq 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. *Cylindrické souřadnice* jsou tvaru:

$$\Phi : \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Phi : \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det\Phi' = r\ .$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \leq r \leq z \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r\ dV = \int\limits_0^2 \int\limits_0^z \int\limits_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dz = 2\pi \int\limits_0^2 \int\limits_0^z r^3\ \ dr\ dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^2 z^4\ \ dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

(ii) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \leq 1 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \leq 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leq 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad r^2 \leq z \leq 2 - r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dV =$$

$$= \iiint_{U} r^3 \cdot r \ d\varphi \ dz \ dr = \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} \int_0^{2\pi} r^3 \ d\varphi \ dz \ dr = 2\pi \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r^3 \ dz \ dr =$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^3(1-r^2) \ \ dr = 4\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

10.4 (cylindrické souřadnice)

Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint_E x^2 \ dV,$$

kde

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \quad \& \quad x \leq 0 \ .$$

Řešení:

Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu proto použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U: \quad 0 \leq r \leq z \quad \& \quad 0 \leq z \leq 2 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \ .$$

Pak máme

$$\iiint_{E=\Phi(U)} x^2 \ dV = \iiint_U r^3 \cos^2\varphi \ dV = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 \int_0^z r^3 \cos^2\varphi \ dr \ dz d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 z^4 \cos^2\varphi \ dz d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^2 z^4\ dz\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\varphi\ d\varphi\right) = \frac{8}{5}\pi.$$

10.5 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV$$

kde E je oblast mezi sférami se středy v počátku a poloměry 1 a 2.

Řešení:
Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 1 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi\ .$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin\vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint_{E=\Psi(U)} xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV = \iiint_U r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot e^{r^4}\cdot r^2\sin\vartheta\ dr\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 e^{r^4}\ dr\right)\cdot\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi\right)}_{0}\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\ d\vartheta\right) = 0\ .$$

10.6 (sférické souřadnice)
Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad \& \quad z\cdot\tan(\alpha_0) \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1 \; dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin\vartheta \; dV = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\alpha_0} \int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; dr = 2\pi(1-\cos\alpha_0) \int\limits_0^R r^2 \; dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Psi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{1}{m} \int\limits_0^R \int\limits_0^{\alpha_0} \int\limits_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int\limits_0^R r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1-\cos 2\alpha_0}{1-\cos\alpha_0} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha_0).$$

10.7 (cylindrické souřadnice)
Určete těžiště a moment setrvačnosti (vůči ose symetrie) homogenního kužele s výškou $h > 0$ a poloměrem podstavy $R > 0$.

Řešení:
Kužel

$$E: \quad 0 \le z \le h \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint\limits_E 1 \; dV = \int\limits_0^h \Big(\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z} 1 \; dxdy \Big) \; dz = \int\limits_0^h \pi \left(\frac{R}{h} \cdot z \right)^2 \; dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_E z \; dV = \frac{1}{m} \int\limits_0^h \Big(\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z} z \; dxdy \Big) \; dz = \frac{1}{m} \int\limits_0^h \pi \left(\frac{R}{h} \cdot z \right)^2 \cdot z \; dz = \frac{1}{m} \frac{\pi}{4} R^2 h^2 = \frac{3}{4} h \; .$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezu (přesněji na závislostí plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel"s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

Moment setrvačnosti I vůči nějaké ose otáčení se počítá jako

$$I = \iiint_E v^2 \sigma \; dV,$$

kde $v(x, y, z)$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od osy otáčení a σ je hustota. V našem případě je

$$v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a

$$\sigma(x, y, z) = 1$$

pro $(x, y, z) \in E$. Pro výpočet už tentokrát budeme potřebovat cylindrické souřadnice

$$\Phi : \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

a parametrizaci $E = \Phi(U)$ jako

$$U : \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le \frac{R}{h} \cdot z \quad \& \quad 0 \le z \le h\ .$$

Takže máme

$$I = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2 + y^2) \; dV = \iiint_U r^2 \cdot r \; d\varphi \; dr \; dz =$$

$$= \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \int_0^{2\pi} r^3 \; d\varphi \; dr \; dz = 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\frac{R}{h}z} dz = \frac{\pi}{2} \int_0^h \left(\frac{R}{h} z \right)^4 dz =$$

$$= \frac{\pi R^4}{2h^4} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{\pi}{10} \cdot R^4 h.$$

10.8 (obecnější sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \& \quad x, y, z \ge 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi : \begin{array}{ccc} x/a & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y/b & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z/c & = & r\cos\vartheta \end{array} ,$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint\limits_{E} 1 \, dV = \frac{1}{8} \iiint\limits_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \, dV = \frac{1}{8} \iiint\limits_{K} |\det \mathcal{L}'| \, dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \iiint\limits_{K} 1 \, dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Phi(U)} z \, dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} (cr\cos\vartheta) \cdot (abc\, r^2 \sin\vartheta) \, dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi \right) = \frac{3}{8} c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.