12. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. května 2017

12.1 (křivkový integrál z funkce)
Integrujte

(i) funkci $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ podél křivky Γ: $y = \frac{x^2}{2}$ od bodu $A = (1, \frac{1}{2})$ do bodu $B = (0,0)$.

(ii) funkci $f(x,y) = x + y$ podél křivky Γ: $x^2 + y^2 = 4$ v prvním kvadrantu od bodu $A = (2,0)$ do bodu $B = (0,2)$.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_\Gamma f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky Γ, tj. zobrazení $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$ (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- φ je prosté na $\langle a,b\rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a,b\rangle$ (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a,b\rangle) = \Gamma$.

(i) Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1-t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1+(t-1)^2}.$$

Takže

$$\int_\Gamma f\ ds = \int_0^1 \frac{1-t+\frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1+(1-t)^2}} \cdot \sqrt{1+(t-1)^2}\ dt = \int_0^1 1-t+\frac{(1-t)^4}{4}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=1-t \\ du=-dt \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= -\int_1^0 u + \frac{u^4}{4}\ du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

(ii) Jako parametrizaci si zvolíme např. polární souřadnice $\varphi(t) = \big(2\cos t, 2\sin t\big)$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \big(-2\sin t, 2\cos t\big) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = 2.$$

Takže

$$\int_\Gamma f\ ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t + \sin t\ dt = 4\Big[\sin t - \cos t\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8.$$

12.2 (křivkový integrál z funkce)
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\Gamma xy\ ds,$$

kde

$$\Gamma: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ \& \ \ x, y \geq 0$$

s parametry $a \neq b$.

Řešení:
Křivka je jedna čtvrtina elipsy a proto zvolíme na parametrizaci upravené polární souřadnice

$$\varphi: \quad \begin{aligned} \tfrac{x}{a} &= \cos t \\ \tfrac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \Big(-a \sin t, \ b \cos t \Big)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \ .$$

Takže

$$\int_\Gamma xy \ ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \ dt = \left[\substack{u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ du = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t \ dt} \right] =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u} \ du = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} \ .$$

12.3 (délka křivky)

Částice se pohybuje tak, že poloha v čase t je určena jako $\varphi(t) = \Big(\cos t, \ \sin t, \ \frac{t^2}{2} \Big)$. Určete délku dráhy, kterou urazí v časovém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:
Křivka leží v plášti válce $x^2 + y^2 = 1$ a je to postupně se roztahující šroubovice. Délka křivky Γ se pak vypočítá jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \ ds = \int_a^b ||\varphi'(t)|| \ dt \ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(-\sin t, \cos t, t \big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} = \sqrt{1 + t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \ ds = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \ dt = \left[\substack{t = \sinh(\alpha) \\ dt = \cosh(\alpha) d\alpha} \right] = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha)} \cdot \cosh(\alpha) \ d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{\operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1+\sqrt{1+1^2})} \cosh^2(\alpha)\ d\alpha = \int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\right)^2\ d\alpha = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 2 + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\ d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\Big[e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}\Big]_{\alpha=0}^{\alpha=\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\ .$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce $u = \sqrt{1+t^2}$ je částí hyperboly ($u^2 - t^2 = 1$), je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\ .$$

Jde o rozklad funkce e^α na sudou a lichou funkci, tj. $e^\alpha = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)$. Podobně se pro parametrizaci kružnice $u = \sqrt{1-t^2}$ zase používají goniometrické funkce $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1,$	$\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$
$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \cosh(2\alpha),$	$\cosh'(\alpha) = \sinh(\alpha)$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro $t = \sinh(\alpha)$:

$$\operatorname{arcsinh}(\alpha) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right).$$

12.4 (délka křivky)

Spočítejte délku části kuželové spirály Γ s $n \in \mathbb{N}$ závity definované parametrizací $\varphi : \langle 0, 2n\pi\rangle \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(t) = \Big(t\cos t,\ t\sin t,\ t\Big).$$

Řešení:

Křivka leží v plášti kužele $x^2 + y^2 = z^2$. Délka křivky Γ s parametrizací φ se pak vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_a^b ||\varphi'(t)||\ dt \ \ \Big(= \int\limits_\Gamma 1\ ds\Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1\big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\big(\cos t - t\sin t\big)^2 + \big(\sin t + t\cos t\big)^2 + 1^2} = \sqrt{2+t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_\Gamma 1\ ds = \int\limits_0^{2n\pi} \sqrt{2+t^2}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} t=\sqrt{2}u \\ dt=\sqrt{2}du \end{smallmatrix}\right] = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1+u^2}\ du = \left[\begin{smallmatrix} u=\sinh(x) \\ du=\cosh(x)dx \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= 2\int\limits_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} \cosh^2(u)\ du = \int\limits_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} 1+\cosh(2u)\ du = \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2}\right]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \Big[u + \sinh(u)\cosh(u)\Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \Big[u + \sinh(u)\sqrt{1+\sinh(u)^2}\Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1+2n^2\pi^2} = \ln\left(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1+2n^2\pi^2}\right) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1+2n^2\pi^2}.$$

Poznámka: Opět jsme využili vztahy pro hyperbolické funkce $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ a $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \qquad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Sečtením dostaneme

$$\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$$

a zderivováním tohoto vztahu pak

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x).$$

Inverzní funkci pro $u = \sinh(x)$ už známe:

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right).$$

12.5 (křivkový integrál z vektorového pole)

Najděte práci síly $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ vykonané na částici podél křivky Γ s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Její orientace je indukována touto parametrizací.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_a^b \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_0^1 (t^2+t^4, t^4+t, t+t^2)\cdot\begin{pmatrix}1\\2t\\4t^3\end{pmatrix}\ dt = \int\limits_0^1 3t^2+5t^4+6t^5\ dt = \Big[t^3+t^5+t^6\Big]_0^1 = 3.$$

12.6 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int\limits_\Gamma y\ dx - x\ dy$$

kde Γ je asteroida určená parametrizací

$$\varphi: \quad x = a\cos^3 t \quad \& \quad y = a\sin^3 t \quad \& \quad 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

Řešení:
Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(y,\ -x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} (a\sin^3 t, -a\cos^3 t) \cdot \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= -3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = -\frac{3}{4}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = -\frac{3}{4}\pi a^2.$$

12.7 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_\Gamma (2a - y)\ dx + x\ dy$$

pro oblouk cykloidy Γ dané parametrizací

$$\varphi: \quad x = a(t - \sin t) \quad \& \quad y = a(1 - \cos t) \quad \& \quad 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a, která se valí bez tření po přímce.).

Řešení:
Máme

$$\varphi'(t) = \Big(a(1 - \cos t),\ a\sin t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(2a - y,\ x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \Big(a(1 + \cos t),\ a(t - \sin t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t\ dt = a^2 \int_0^{2\pi} t\sin t\ dt = a^2 \Big[-t\cos t\Big]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t\ dt = -2\pi a^2.$$