13. cvičení z Matematické analýzy 2

15. - 19. května 2017

13.1 (konzervativní pole, potenciál)

Dokažte, že následující pole jsou konzervativní a najděte jejich potenciál.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y, \quad y^2 + x, \quad ze^z)$,

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, \quad -\frac{1}{x+z}, \quad \frac{y}{(x+z)^2}\right)$.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{z}, \quad -\frac{3}{z}, \quad \frac{3y-x}{z^2}\right)$.

Řešení:

Práce síly $\vec{F}$ v *oblasti* U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "osa x'' nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1 \, d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \mathrm{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

(i) Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0 - 0, \quad 0 - 0, \quad 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 + y && (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^2 + x && (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= ze^z \ . && (3) \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

(ii) Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2},\ \ \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3},\ \ \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}\right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} && (4) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{x+z} && (5) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{y}{(x+z)^2} \ . && (6) \end{aligned}$$

Začneme třeba druhou rovnici:

$$f(x,y,z) = \int -\frac{1}{x+z}\ dy = -\frac{y}{x+z} + C(x,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{x+z} + C(x,z)\right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x,z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x+z} + D(x)\right) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2\ dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

(iii) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.
Pro potenciál f musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{z} \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y-x}{z^2}\ . \tag{9}$$

Začneme třeba první rovnici:

$$f(x,y,z) = \int \frac{1}{z}\ dx = \frac{x}{z} + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z} + C(y,z)\right) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int -\frac{3}{z}\ dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = \frac{x-3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y-x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-3y}{z} + D(z)\right) = -\frac{x-3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x-3y}{z} + K.$$

13.2 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)

$$\iint\limits_M z \; dS,$$

kde M je částí válce $x^2+y^2=1$ mezi rovinami $z=0$ a $z=x+1$.

(ii)

$$\iint\limits_M yz \; dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x=uv$, $y=u+v$, $z=u-v$ a $u^2+v^2 \leq 1$.

(iii)

$$\iint\limits_M x^2z + y^2z \; dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$.

Řešení:
Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint\limits_M f \; dS = \iint\limits_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS \; ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

(i) Plocha je určena jako

$$M : \quad x^2+y^2=1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x+1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1+\cos\varphi.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0,0,1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Takže pro funkci $f(x,y,z) = z$ máme

$$\iint\limits_M f\ dS = \iint\limits_U z\ dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1+\cos\varphi} z\ dz\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2}\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2} \right)\ d\varphi =$$

$$= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

(ii) Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U: \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (uv, u+v, u-v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u+v$ a $z = u-v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v,1,1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u,1,-1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v+u, v-u) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2+v^2)+4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint\limits_M yz\ dS = \iint\limits_U (u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\ dS = \left[\begin{smallmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ (r,\varphi)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1} r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2+4}\ dr\ d\varphi = \left(\int\limits_0^{3} r^3\sqrt{2r^2+4}\ dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi\ d\varphi \right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u+v$ a $z = u-v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2-z^2}{4}$ a $1 \geq u^2+v^2 = \frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \qquad y^2 + z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

(iii) Plochu $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\ \&\ z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi,\vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, 2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\sin\vartheta\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (2\cos\vartheta\cos\varphi, 2\cos\vartheta\sin\varphi, -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint\limits_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \; dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \Big[8\sin^4\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

13.3 (plošný integrál z funkce - aplikace)

Určete hmotnost plochy S, která je leží na plášti kuželu $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a je vymezená pomocí $1 \le z \le 4$, jestliže její plošná hustota je dána jako $\rho(x,y,z) = 10 - z$.

Řešení:
Hmotnost plochy S je určena jako $\iint\limits_S \rho \, dS$. Plocha je parametricky určena např. jako graf funkce pomocí:

$$\Phi = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$$

s definičním oborem

$$U: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4^2.$$

Takže máme

$$\iint\limits_S \rho \, dS = \iint\limits_S (10 - z) \, dS = \iint\limits_U \left(10 - \sqrt{x^2+y^2}\right) \, dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 1 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^4 (10 - r) \, r \, dr d\varphi = \left(\int_1^4 (10 - r) \, r \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \left[5r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^{r=4} = 108\pi.$$

13.4 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientaci danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \big(y,x,z^2\big)$ a S je šroubová plocha s parametrizací $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$ a orientací indukovanou touto parametrizací.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = (e^y,\ ye^x,\ x^2y)$ a S je částí paraboloidu $z = x^2+y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ s horní orientací.

Řešení:
Tok vektorového pole $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dS\ ,$$

kde $\Phi : U \to S$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

(i) Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1 - x^2 - y^2\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -2x\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(2y, 2x, 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint_U (y, x, 1 - x^2 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint_U (1 + x^2 + y^2)\ dS = \begin{bmatrix} \scriptstyle x = r\cos\varphi \\ \scriptstyle y = r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0 \leq r \leq 1 \\ \scriptstyle 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r^2) r\ dr d\varphi = \left(\int_0^1 (1 + r^2) r\ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(1 + r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{15}{2}\pi.$$

(ii) Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial u} &= \big(\quad \cos v, \quad \sin v, \quad 0\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial v} &= \big(\quad -u\sin v, \quad u\cos v, \quad 1\big) \end{aligned}$$

a orientace indukovaná touto parametrizací je dána vektorovým polem

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} = \big(\sin v, -\cos v, u\big).$$

Takže pro

$$U: \quad 0 \le u \le 1 \;\; \& \;\; 0 \le v \le \pi$$

máme

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) dS \;=\iint\limits_U (u\sin v, u\cos v, v^2)\cdot\begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} dS \;=$$

$$= \iint\limits_U u(\sin^2 v - \cos^2 v) + v^2 u \; dS = \left(\int_0^1 u\; du\right)\cdot\left(\int_0^\pi -\cos(2v)\; d\varphi\right) + \left(\int_0^1 u\; dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi v^2\; d\varphi\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{6}.$$

(iii) Plocha M je grafem funkce $f(x,y) = x^2+y^2$, takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \;\; \& \;\; 0 \le y \le 1\ .$$

Máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientací plochy "nahoru." Máme tak

$$\iint\limits_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}(\Phi(x,y))\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_U \left(e^y, ye^x, x^2y\right)\cdot\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}\; dS =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(-2xe^y - 2y^2e^x + x^2y\right)\; dx\; dy = \int_0^1 -e^y - 2y^2(e^1-1) + \frac{y}{3}\; dy = -(e-1) - \frac{2}{3}(e-1) + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{5}{3}e.$$

13.5 (plošný integrál z vektorového pole - tok)

Spočítejte

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ a S je sféra $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ s vnější orientací a $R > 0$ je parametr.

Řešení:

Integrál spočítáme podle definice (ale lze použít i Gaussovu větu, protože jde o uzavřenou plochu). Plochu S zparametrizujeme přirozeně pomocí posunutých sférických souřadnic:

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x-a &=& R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y-b &=& R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z-c &=& R\cos\vartheta \end{array}$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi \ .$$

Máme

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &=& \big(-R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\sin\vartheta\cos\varphi,\ \ 0 \ \big) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &=& \big(R\cos\vartheta\cos\varphi,\ R\cos\vartheta\sin\varphi,\ -R\sin\vartheta \big) \end{array}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -R\sin\vartheta \cdot \big(R\sin\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta\big) = -R\sin\vartheta \cdot \big(x-a,\ y-b,\ z-c\big).$$

Vektor $(x-a,\ y-b,\ z-c)$ míří směrem od bodu (a,b,c) k bodu $(x,y,z) \in S$. Takže vektorový součin má opačný směr, než zadaná vnější orientace sféry M. Proto místo $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$ vezmeme v integrálu $\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$.

Pro skalární součin vektoru v integrálu tedy máme

$$(\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right) =$$

$$= R\sin\vartheta \cdot \Big((a + R\sin\vartheta\cos\varphi)^2,\ (b + R\sin\vartheta\sin\varphi)^2,\ (c + R\cos\vartheta)^2 \Big) \cdot \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= R^2\sin\vartheta \cdot \Big[2R\big(a\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + c\cos^2\vartheta\big) + c^2\cos\vartheta + R^2\cos^3\vartheta + \cdots \Big]$$

kde tečky znamenají výrazy, ze kterých se dá vytknout buď pouze " $\sin\varphi$" nebo pouze " $\cos\varphi$" a to v liché mocnině. V integrálu pak tyto výrazy dají nulu. Takže už můžeme psát

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \iint_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\vartheta\le\pi}} R^2\sin\vartheta \cdot \Big[2R\big(a\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + c\cos^2\vartheta\big) + c^2\cos\vartheta + R^2\cos^3\vartheta \Big]\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta \cdot \Big[2R\big(\pi a \sin^2\vartheta + \pi b \sin^2\vartheta + 2\pi c \cos^2\vartheta\big) + 2\pi c^2 \cos\vartheta + 2\pi R^2 \cos^3\vartheta\Big]\ d\vartheta = \\
&= 2R^3\pi(a+b) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\ d\vartheta\right) + 4R^3\pi c \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\ d\vartheta\right) + \\
&\quad + R^2\pi c^2 \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin(2\vartheta)\ d\vartheta\right) + 2R^4\pi \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos^3\vartheta \sin\vartheta\ d\vartheta\right) = \\
&= 2R^3\pi(a+b) \cdot \left(\int_0^{\pi} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\ d\vartheta\right) + 4R^3\pi c \cdot \Big[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} + 2R^4\pi \cdot \Big[-\frac{\cos^4\vartheta}{4}\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \\
&= \quad 2R^3\pi(a+b) \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) + 4R^3\pi c \cdot \frac{2}{3} \quad = \quad \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)\ .
\end{aligned}
$$