14. cvičení z Matematické analýzy 2

22. - 26. května 2017

14.1 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y) = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky Γ, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka Γ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Podle Greenovy věty pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\Gamma = \partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

14.2 (použití Greenovy věty)

Určete

(i)

$$\int\limits_{\Gamma} y(x^2+1) \, dx + x(y^2-1) \, dy$$

kde Γ je kladně orientovaná hranice obdélníka $M = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,2 \rangle$.

(ii)

$$\int\limits_{\Gamma} (xy+y) \, dx + (xy+x) \, dy$$

kde $\Gamma :\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \ \ \& \ \ y \ge 0$, se zápornou orientací.

Řešení:
V obou příkladech můžeme použít Greenovu větu.

(i) Zápis znamená, že máme pole $\vec{F}(x,y) = \Big(y(x^2+1),\ x(y^2-1)\Big)$. Orientace křivky Γ odpovídá použití Greenovy věty pro oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 2.$$

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y^2 - 1 - (x^2+1)$$

a proto

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_M y^2 - x^2 - 2\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^2 y^2 - x^2 - 2\ dy\ dx =$$

$$= 1\cdot\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\cdot 2 - 4 = -2.$$

(ii) Zde máme pole $\vec{F}(x,y) = \Big(xy+y,\ xy+x\Big)$. Orientace křivky Γ je nyní opačná než je v Greenově větě. Musíme proto ještě otočit znaménko v integrálu. Oblast M, kterou Γ ohraničuje je půlkruh

$$M: \quad (x-1)^2 + y^2 \le 1 \quad \& \quad y \ge 0.$$

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y + 1 - (x+1) = y - x$$

a proto máme

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_M x - y\ dS = \begin{bmatrix} x-1=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^1 (r\cos\varphi - r\sin\varphi + 1)r\ dr\ d\varphi = \int\limits_0^\pi \frac{1}{3}(\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{2}\ d\varphi = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

14.3 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

(i)

$$\int\limits_\Gamma y^2\, dx + 3xy\, dy$$

kde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ je hranice mezikruží určeného záporně orientovanou kružnicí Γ_1 s poloměrem 2 a středem v počátku a kladně orientovanou kružnicí Γ_2 s poloměrem 1 a středem také v počátku.

(ii)

$$\int\limits_\Gamma (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\, dy$$

kde Γ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

(iii)

$$\int_\Gamma x^4\,dx + xy\,dy$$

kde Γ je kladně orientovaná hranice trojúhelníku s vrcholy $A = (0,1)$, $O = (0,0)$, $B = (1,0)$.

Řešení:
(i) Orientace hranice mezikruží odpovídá orientaci pro Greenovu větu (správná orientace znamená, že při postupu podél hranice máme oblast po levé straně). Naše oblast je tvaru

$$M: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 2^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(y^2,\ 3xy\right) .$$

Můžeme proto psát

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_M 3y - 2y\ dS = \iint\limits_M y\ dS = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 1\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\cos\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int_1^2 r^2\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi\right) = 0 .$$

(ii) Naše oblast M je kruh o poloměru 3

$$M: \quad x^2 + y^2 \le 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(3y - e^{\sin x},\ 7x + \sqrt{y^4+1}\right) .$$

Orientace křivky Γ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_M (7-3)\ dS = \iint\limits_M 4\ dS = 4\cdot\pi\cdot 3^2 = 36\pi .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

(iii) Trojúhelník M popíšeme jako

$$M: \quad 0 \le y \le 1\ \ \&\ \ 0 \le x \le 1-y$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(x^4,\ xy\right) .$$

Orientace křivky Γ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_M y\ dS = \int_0^1\int_0^{1-y} y\ dx\ dy = \int_0^1 y(1-y)\ dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} .$$

14.4 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

(i) kde $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ a M je řez kostky $J = \langle 0, a\rangle^3$ rovinou $x + y + z = \frac{3a}{2}$. Orientace okraje je určena pořadím bodů $\left(\frac{a}{2}, a, 0\right)$, $\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$ a $\left(a, \frac{a}{2}, 0\right)$.

(ii) kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a Γ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora.

Řešení:

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\ .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

(i) Množina M je pravidelný šestiúhelník s hranou o délce $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \big(-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y \big)\ .$$

Podle zadání je normálové vektorové pole orientované plochy M určené (normovaným) vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ (směru vektoru také odpovídá zadání). K výpočtu využijeme

- definici toku pole plochou,
- toho, že plocha splňuje rovnici $x + y + z = \frac{3a}{2}$ a
- toho, že známe velikost plochy pravidelného šestiúhelníku:

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{M} \big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\big)\ dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint\limits_{M} x + y + z\ dS =$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint\limits_{M} \frac{3a}{2}\ dS = -2\sqrt{3}a \iint\limits_{M} 1\ dS = -2\sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3\ .$$

(ii) Plocha M je trojúhelník. Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v kladném smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3,1,1)\ .$$

Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x - 3y,\ 2y\big)\ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3 - 3x - y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 3 - 3x - y)$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \;\; \& \;\; 0 \le y \le 3 - 3x \; .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \big(1, \quad 0, \quad -3\big)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(0, \quad 1, \quad -1\big)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(3, 1, 1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{M=\Phi(U)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{U} \Big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\Big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dS =$$

$$= \iint_{U} (3x,\ x - 3y,\ 2y) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint_{U} (-10x + y)\ dS = \int_0^1 \int_0^{3(1-x)} y - 10x\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{9}{2}(1-x)^2 - 30x(1-x)\ dx = \frac{3}{2} - 30 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{7}{2} \; .$$

14.5 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, x, e^{xy} \cos z)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $z \ge 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\; \& \;\; z \ge 0$$

a

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad z = 0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha \cos\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\ d\alpha = \pi.$$

14.6 (Stokesova věta)

Určete

$$\int_\Gamma (y-z)\ dx + (z-x)\ dy + (x-y)\ dz$$

kde

$$\Gamma:\ x^2+y^2=1\ \ \&\ \ x+z=1$$

je kladně orientovaná křivka při pohledu seshora.

Řešení:

Křivka Γ je elipsa, která vznikne jako průnik roviny $x+z=1$, která šikmo přeřízne povrch válce $x^2+y^2=1$. Můžeme ji chápat jako hranici plochy

$$S: \qquad x^2+y^2 \le 1\ \ \&\ \ x+z=1$$

s orientací nahoru. Použijeme proto Stokesovu větu. Spočítáme si rotaci

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \big(-2,\ -2,\ -2\big)\ .$$

Normované normálové vektorové pole orientované plochy M je určené normálovým vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$ (směr vektoru také odpovídá zadání). Můžeme pak psát

$$\int_{\Gamma=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_M \big(\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\big)\ dS = -2\sqrt{2}\iint_M 1\ dS\ .$$

Teď už stačí jen určit velikost povrchu plochy M (tj. $\iint_M 1\ dS$). Protože ale jde o plochu ohraničenou elipsou s délkami poloos $a=1$ a $b=\sqrt{2}$ (snadno určíme z obrázku), je obsah roven $\pi ab = \sqrt{2}\pi$.

Dosazením pak dostáváme

$$\int_{\Gamma=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \cdots = -2\sqrt{2}\iint_M 1\ dS = -2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\pi = -4\pi\ .$$

14.7 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)$ a S je sféra $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ s vnější orientací a $R>0$ je parametr.

Řešení:

Gaussova věta

$$\iint_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_M \mathrm{div}(\vec{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj ∂M oblasti M v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast M. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

V našem případě je orientace plochy S v souladu s Gaussovou větou. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2(x+y+z) \ .$$

Protože sféra S má střed v obecném bodě, vezmeme si příslušně posunuté sférické souřadnice Φ, které budou parametrizovat kouli

$$M: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2$$

pro kterou je $\partial M = S$ jako

$$\Phi: \quad \begin{aligned} x-a &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y-b &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z-c &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi \ .$$

Použijeme tedy obvyklou větu o substituci (opět máme $\det(\Phi') = r^2\sin\vartheta$) a dostaneme, že

$$\iint\limits_{S=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M=\Phi(U)} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{U} \Big(\operatorname{div}(\vec{F})\circ\Phi\Big)\cdot|\det(\Phi')|\ dr\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_{U} 2\Big[r(\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta) + a + b + c\Big]\cdot r^2\sin\vartheta\ dr\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi\right)}_{=0}\cdot\Big(\dots\Big) + \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\ d\varphi\right)}_{=0}\cdot\Big(\dots\Big) + \underbrace{\left(\int_0^{\pi}2\cos\vartheta\sin\vartheta\ d\vartheta\right)}_{=0}\cdot\Big(\dots\Big) +$$

$$+2(a+b+c)\underbrace{\left(\int_0^{R} r^2\ dr\right)}_{=\frac{R^3}{3}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}1\ d\varphi\right)}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\ d\vartheta\right)}_{=2} = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c) \ .$$

Srovnejte výsledek i náročnost postupu se stejným příkladem z minulého cvičení (počítaným ovšem "přímo").

14.8 (Gaussova věta)

Určete

$$\iint\limits_{S} xz\ dx\ dy + xy\ dy\ dz + yz\ dz\ dx$$

kde S je hranice čtyřstěnu

$$M: \quad x+y+z \leq 1 \;\;\&\;\; x,y,z \geq 0$$

orientovaná vnější normálou.

Řešení:
Použijeme Gaussovu větu. Orientace plochy S je v souladu s Gaussovou větou. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z + x + y \ .$$

Čtyřstěn M si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1-x \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1-x-y$$

Máme tedy

$$\iint\limits_{S=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} x+y+z \ dz \ dy \ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left[(x+y) + \frac{1}{2}(1-x-y)\right](1-x-y) \ dy \ dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} 1-(x+y)^2 \ dy \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}$$

14.9 (Gaussova věta)
Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ a sféru $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Řešení:
Máme

$$M: \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

a

$$\partial M: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \ .$$

Orientace okraje ∂M je dána vnější normálou.
Gaussovu větu

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV$$

ověříme tak, že zjistíme, zda oba integrály dávají stejnou hodnotu.

• hodnota $\iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV$:
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2+y^2+z^2)$$

a

$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \iiint\limits_{M} 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ dV = \left[\begin{array}{c} x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot |r^2 \sin\vartheta| \; dr\; d\varphi\; d\vartheta = \left(\int_0^1 3r^4 \; dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\vartheta \; d\vartheta\right) = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

- hodnota $\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S}$:

Pro druhý integrál si zvolíme parametrizaci ∂M pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta),$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \; .$$

Máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sin\vartheta\sin\varphi,\; \sin\vartheta\cos\varphi,\; 0) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= (\cos\vartheta\cos\varphi,\; \cos\vartheta\sin\varphi,\; -\sin\vartheta) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta \cdot (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) = -\sin\vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta).$$

Vektor $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$ tedy má směr normály směřující dovnitř. Protože plochu máme orientovanou směrem ven, musíme při výpočtu toku pole vzít tento vektor s opačným znaménkem, tj. $-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$.

Dosazením tedy obdržíme

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \vec{F}(\Phi(\varphi, \vartheta)) \cdot \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) dS = \iint\limits_{U} \vec{F}(\Phi(\varphi, \vartheta)) \cdot \Big(\sin\vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta)\Big) \; dS =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \Big(\sin^4\vartheta\cos^4\varphi + \sin^4\vartheta\sin^4\varphi + \cos^4\vartheta\Big) \; d\varphi \; d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^{\pi} \sin^5\vartheta \; d\vartheta\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \; d\varphi\right) + \left(\int_0^{\pi} \cos^4\vartheta\sin\vartheta \; d\vartheta\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi\right).$$

Pro první dva integrály máme díky posunutí a symetriím, že

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \; d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \; d\varphi$$

a

$$\int_0^{\pi} \sin^5\vartheta \; d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\vartheta \; d\vartheta.$$

Pro $n \geq 2$ spočítáme tedy integrál

$$A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\alpha \; d\alpha = [-\cos\alpha \cdot \sin^{n-1}\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}\alpha \cdot \cos^2\alpha \; d\alpha =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) \; d\alpha = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ a $A_2 = \frac{\pi}{4}$ a $A_0 = 1$. Dokončením výpočtu dostáváme

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \cdots = \left(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \left(\left[-\frac{\cos^5 \vartheta}{5}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}\right) \cdot \left(2\pi\right) = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi,$$

a Gaussova věta je tak pro tento případ ověřena.