

3. cvičení z Matematické analýzy 2

6. - 10. března 2017

3.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu (někde je výhodné použít polární souřadnice):

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$,

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$,

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|+|y|}$, kde $\alpha, \beta > 0$,

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

(e) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{xz^2 - y^2z}{xyz - 1}$.

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$,

Řešení:

(a) neexist. ; (b) 1 ; (c) 0 pro $\alpha + \beta > 1$, neexist. pro $\alpha + \beta \leq 1$; (d) 0 ; (e) neexist. ; (f) neexist.

3.2 Najděte všechny derivace ve směru v bodě $(0, 0)$ pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Má funkce f v bodě $(0, 0)$ derivaci (tj. totální diferenciál)?

(b) Je funkce f v bodě $(0, 0)$ spojitá?

(c) Jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ spojité?

Řešení:

Derivace existují pouze pro směry $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$, tj. jde o parciální derivace a jejich hodnota je $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(a) Totální diferenciál v $(0, 0)$ neexistuje, protože neexistují ani všechny derivace ve směrech.

(b) Ano.

(c) Ne.