4. cvičení z Matematické analýzy 2

13. - 17. března 2017

4.1 Mějme funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(a) Najděte všechny derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ podle vektoru $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Ukažte, že zobrazení

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \vec{u} &\mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \end{aligned}$$

je lineární.

(b) Má funkce f v bodě $(0,0)$ derivaci (tj. platí, že $L = \mathrm{d}f(0,0)$)?

(c) Je funkce f v bodě $(0,0)$ spojitá?

Řešení:
(a) Všechny derivace ve směrech jsou nulové, takže L je určitě lineární.
(b) Ne.
(c) Ne.

4.2 Mějme funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + 2x, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(a) Má funkce f v bodě $(0,0)$ derivaci?

(b) Je funkce f v bodě $(0,0)$ spojitá?

(c) Jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ spojité?

Řešení:
(a) Ano.
(b) Ano.
(c) Ne.

4.3 Vyšetřete existenci derivace (totálního diferenciálu) v bodě $(0,0)$ u funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Je funkce f v bodě $(0,0)$ spojitá?

Řešení:
Derivace v $(0,0)$ neexistuje, přesto je ale f v $(0,0)$ spojitá.

4.4 Pro následující funkce f najděte parciální derivace a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = x^2y + \ln(x+2y)$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$,

(c) $f(x,y) = (xyz)^{\sqrt{x^2+y^2}}$,

(d) $f(x,y,z) = 3x^2y + 4xyz + 8xy^2z$,

(e) $f(x,y,z) = \ln(z^2 - x^2 - y^2)$.

4.5 Určete diferenciál (tj. derivaci) funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$ v bodě $(1,1)$. V tomto bodě určete i derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Je tento směr něčím význačný?

Řešení:
Pro $a_0 = (1,1)$ je $\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{y}{1+(xy)^2}, \frac{x}{1+(xy)^2}\right)(a_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dále máme $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \operatorname{grad} f(a_0)[\vec{u}] = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}/2$. Směr $\vec{u}$ je směrem gradientu, tedy směrem největšího růstu funkce f v daném bodě.

4.6 Pro funkci

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$$

najděte v bodě $(0,0)$ všechny derivace podle vektoru.

(a) Má funkce f v bodě $(0,0)$ totální diferenciál?

(b) Najděte všechny směry $\vec{u}$, ve kterých je růst funkce f v bodě $(0,0)$ největší (nejmenší, nulový). (Tj., $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ nabývá největší (nejmenší, nulové) hodnoty.)

Řešení:
Derivace podle vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ jsou $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \sqrt[3]{u_1^3 + u_2^3}$.

(a) Ne. Plyne to buď přímo z výpočtu podle definice nebo z toho, ze zobrazení $\vec{u} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ není lineární.

(b) Každý směr lze popsat jako $\vec{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Protože derivace v $(0,0)$ neexistuje, musíme zkrátka (ručně) vyšetřit maxima minima a nulové hodnoty funkce

$$g(\varphi) := \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \sqrt[3]{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\ .$$

Maxima jsou ve směrech $(1,0)$ a $(0,1)$; minima ve směrech $(-1,0)$ a $(0,-1)$; nulové hodnoty ve směrech $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. I podle toho je poznat, že derivace neexistuje, protože (v případě, že všechny derivace ve směrech nejsou nulové) musel by existovat jen *jeden* směr největšího růstu a *jeden* směr nejmenšího růstu (a tyto směry musí být navzájem opačné).

4.7 Velmi unavený horolezec leze po ploše, která je grafem funkce $f(x,y) = e^{xy} + \ln x$. Právě se nachází v bodě $A = (1,1,?) \in \mathbb{R}^3$. Kterým ze dvou směrů

$$\vec{U} = (1,2,?) \quad \text{a} \quad \vec{V} = (2,1,?)$$

(v tečné rovině grafu funkce f v bodě A) se má vydat, aby šel cestou menšího stoupání?

Řešení:
Směrem $\vec{U}$.

4.8 Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

(a) $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right)$,

(b) $(1.04)^{2.02}$.

Řešení:
(a) přibližná hodnota: 0.005 (přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst: 0.00485);
(b) přibližná hodnota: 1.08 (přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst: 1.08245).

4.9 Najděte derivaci funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

v bodě $(1,1)$.

Určete všechny směry $\vec{u}$, ve kterých je růst funkce f v bodě $(1,1)$ největší (nejmenší, nulový). (Tj., $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ nabývá největší (nejmenší, nulové) hodnoty.)

Řešení:
Pro $a_0 = (1,1)$ je $\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{1}{y(1+(x/y)^2)}, -\frac{x}{y^2(1+(x/y)^2)}\right)(a_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Směr největšího růstu funkce f v a_0 je směrem gradientu tedy $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

směr nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

směry nulového růstu jsou směry kolmé ke gradientu tedy $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.10 Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$

(a) v bodě $(1,1,?)$,

(b) v bodě $(2,2,?)$.

Řešení:
(a) tečná rovina je $z - 1 = 2(x-1)$;
(b) tečná rovina je $z - 4 = 3(x-2) + (y-2)$;