5. cvičení z Matematické analýzy 2

20. - 24. března 2017

5.1 (linearizace funkce)

Pro funkci $f(x,y) = xe^{xy}$ nalezněte její linearizaci v bodě $a_0 = (6,0)$. Použijte ji k přibližnému určení hodnoty funkce f v bodě $(5.9, 0.01)$.

Řešení:
linearizace: pro $a = (x,y)$ je $g(a) = f(a_0) + \mathrm{d}f(a_0)[a - a_0] = 6 + (x-6) + 36(y-0) = x + 36y$
přibližná hodnota: $g(5.9, 0.01) = 6.26$
(přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst: $f(5.9, 0.01) \doteq 6.25857$)

5.2 (tečné roviny)

Předpokládejme, že výška terénu v $\mathbb{R}^3$ je popsána grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2+1}$. V bodě $A = (2,1,?)$ upustíme míč. Určete směr (při pohledu shora, tj. v $\mathbb{R}^2$, i v prostoru, tj. v $\mathbb{R}^3$), kterým se bude kutálet.

Dále určete, zda je strmější tečná rovina v bodě A nebo v bodě $B = (0,1,?)$ (tj. porovnejte úhly, které tyto roviny svírají se základnou $z = 0$).

Řešení:
Míč se bude kutálet ve směru největšího spádu funkce, tj. proti směru gradientu

$$\mathrm{grad} f(a) = \left(-\frac{2x}{(x^2+2y^2+1)^2}, -\frac{4y}{(x^2+2y^2+1)^2} \right)_{|a=(2,1)} = \left(-\frac{4}{49}, -\frac{4}{49} \right)$$

tedy ve směru určenému vektorem $\vec{v} = (1,1)$ (pro jednoduchost jsme ho nenormovali). V prostoru to pak bude směr určený vektorem $\vec{V} = (\vec{v}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}) = \left(1, 1, -\frac{8}{49}\right)$.

Úhel α, který svírá tečná rovina v bodě $A = \left(2, 1, \frac{1}{7}\right)$ se základnou $z = 0$, je určen jako $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(a)$, kde $\vec{v_1} = \frac{\mathrm{grad} f(a)}{\|\mathrm{grad} f(a)\|}$. Neboli $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(a) = \mathrm{grad} f(a)[\vec{v_1}] = \|\mathrm{grad} f(a)\| = \frac{4\sqrt{2}}{49}$.

Podobně, úhel β, který svírá tečná rovina v bodě $B = \left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$ se základnou $z = 0$, je určen jako $\mathrm{tg}(\beta) = \|\mathrm{grad} f(b)\| = \| \left(0, -\frac{4}{9}\right) \| = \frac{4}{9}$.

Protože je $\mathrm{tg}(\beta) > \mathrm{tg}(\alpha)$, je v bodě B rovina strmější než v bodě A.

5.3 (tečné roviny)

Najděte rovnici tečné roviny k

(a) elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho : 4x + 2y + z = 3$.

(b) elipsoidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

Řešení:
Použijeme následující důsledek věty o implicitní funkci:

Věta: Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in G \mid f(a) = 0\}$$

vrstevnici funkce f. Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad} f(a) \neq \vec{0}$, pak tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad} f(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

(a) V našem případě je $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\mathrm{grad} f(a) = (2x, 4y, 2z)$. Takže $\mathrm{grad} f(a) = \vec{0}$ právě když $a = (0, 0, 0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je právě $\mathrm{grad} f(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4, 2, 1)$, právě když $(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \mathrm{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

(b) Postupujeme podobně. Rovina, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách, má normálový vektor $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$. Tedy

$$\left(\frac{2x_0}{25}, \frac{2y_0}{16}, \frac{2z_0}{9} \right) = \mathrm{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n} = \lambda \cdot (1, 1, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}.$$

5.4 (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají

(a) grafy funkcí $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a $g(x, y) = \sin(xy)$ v bodě $(1, 0, ?)$.

(b) grafy funkcí $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $g(x, y) = e^{\sin(xy)}$ v bodě $(-1, 0, ?)$.

(c) plochy $M : x^2 + y^2 + z^2 = 8$ a $N : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$ v bodě $(2, 0, 2)$.

Řešení:

(a) Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0 \ \& \ (x,y) \neq (0,0)\}$, kde

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z$$

a pro g to bude $\Gamma_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$, kde

$$G(x,y,z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1,0,0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F(A) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, -1\right)_{|A} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G(A) = \Big(y\cos(xy), x\cos(xy), -1\Big)_{|A} = (0,1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Gradienty funkcí

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z$$

a

$$G(x,y,z) = e^{\sin(xy)} - z$$

v bodě $A = (-1,0,1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F(A) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)_{|A} = (-1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)}, x\cos(xy)e^{\sin(xy)}, -1\Big)_{|A} = (0,-1,-1)\ .$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je opět dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(c) Gradienty funkcí

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-8$$

a

$$G(x,y,z) = (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-6$$

v bodě $A = (2,0,2)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F(A) = (2x,2y,2z)_{|A} = (4,0,4)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G(A) = \Big(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\Big)_{|A} = (2,-4,-2)\ .$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5.5 (derivace složené funkce)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $a_0 = (1,1)$. Definujme si funkci

$$g(t,u) = f\Big(f(u,t), f(t,u)\Big)\ .$$

Určete d$g(a_0)$ pokud je $f(a_0) = 1$ a d$f(a_0) = (1,2)$.

Řešení:
Derivaci budeme raději značit pro větší přehlednost obvyklou "čárkou". Definujme si zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(t,u) = \Big(f(u,t), f(t,u)\Big) \ .$$

Máme tedy složené zobrazení $g = f \circ \Phi$ a $\Phi(a_0) = a_0$. Z věty o derivaci složeného zobrazení v bodě a_0 máme

$$g'(a_0) = f'(\Phi(a_0)) \circ \Phi'(a_0) = f'(a_0) \circ \Phi'(a_0) \ .$$

Spočítejme si derivaci zobrazení Φ. Obecně pro $\Psi(x,y) = \Big(\Psi_1(x,y), \Psi_2(x,y)\Big)$ se složkami $\Psi_1, \Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je matice derivace rovna

$$\Psi'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(x_0,y_0)} \ .$$

Pro lepší orientaci si (standardní) proměnné funkce f označme také jako $f(x,y)$. Pak dostáváme

$$\Phi'(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Výsledek (díky tomu, že $\Phi(1,1) = (1,1)$) je

$$g'(1,1) = f'(1,1) \circ \Phi'(1,1) = (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (4,5) \ .$$

5.6 (vyšší parciální derivace)
Ukažte, že

(a) každá funkce tvaru $H(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, kde f, g mají spojitou druhou derivaci a $a \in \mathbb{R}$, je řešením vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \ .$$

(b) každá funkce tvaru $F(x,y) = yf(x^2 - y^2)$, kde f má spojitou derivaci, je řešením rovnice

$$y^2 \frac{\partial F}{\partial x} + xy \frac{\partial F}{\partial y} = xF \ .$$

Řešení:
(a) Jen pro úplnost: Jestliže funkce f má spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené množině G, pak ve všech bodech množiny G existuje také druhá derivace funkce f.

Existenci druhé derivace funkce H tak máme zaručenu. Při výpočtu použijeme derivaci složené funkce a standardní pravidla pro počítání s derivacemi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) &= f'(x+at) \cdot a + g'(x-at) \cdot (-a) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) &= f'(x+at) \cdot 1 + g'(x-at) \cdot 1 \end{aligned}$$

Dále máme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t) = f''(x+at)\cdot a^2 + g''(x-at)\cdot(-a)^2$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = f''(x+at)\cdot 1^2 + g''(x-at)\cdot 1^2$$

takže opravdu $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$.

Řešení vyjadřuje dva proti sobě postupující signály na přímce, které se pohybují stejnou rychlostí o velikosti $|a|$.

(b) Existenci první derivace funkce F je opět zaručena. Výpočet je opět standardní:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yf'(x^2-y^2)\cdot(2x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1\cdot f(x^2-y^2) + yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)$$

Takže opravdu

$$y^2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) =$$
$$= 2xy^3 f'(x^2-y^2) + xyf(x^2-y^2) - 2xy^3 f'(x^2-y^2) =$$
$$= xyf(x^2-y^2) = xF(x,y)\ .$$

5.7 (vyšší parciální derivace)

Výraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

vyjádřete pomocí funkce $F(u,v) = f(x,y)$, kde $u = x - 2\sqrt{y}$ a $v = x + 2\sqrt{y}$.

Řešení:

Máme vlastně transformaci souřadnic $\Phi(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = \big(x-2\sqrt{y}, x+2\sqrt{y}\big)$. Abychom mohli Φ derivovat na co největší množině, zvolíme si jako definiční obor

$$D(\Phi):\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)\ .$$

Poznámka: Transformace souřadnic je obecně bijektivní zobrazení. Pro diferencovatelnou transformaci, pak požadujeme, aby definiční obor i obor hodnot byly obě otevřené množiny a inverzní zobrazení bylo také diferencovatelné. To si tedy ještě pro pořádek ověříme, ačkoliv pro další výpočty to (explicitně) nepotřebujeme znát. Z předpisu Φ dostáváme $x = \frac{u+v}{2}$ a $\sqrt{y} = \frac{v-u}{4}$. Protože $\sqrt{y} > 0$, dostáváme $v > u$ a obor hodnot zobrazení Φ je tak zřejmě $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid v > u\}$. Zobrazení je také zřejmě na svém definičním oboru prostě, to plyne z předpisu $x = \frac{u+v}{2}$ a $y = \frac{(v-u)^2}{4}$. Odsud dostáváme i diferencovatelnost inverze.

Teď tedy máme $f = F\circ\Phi$. Zderivováním dostaneme

$$f'(x,y) = F'(u,v)\circ\Phi'(x,y)$$

kde $(u,v) = \Phi(x,y)$. Zapsáno pomocí matic to je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{y}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{y}}\end{pmatrix}$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right)$$

Pro další derivaci použijeme řetízkové pravidlo (a pro větší přehlednost nebudeme všude psát explicitní závislost na proměnných). Dostaneme tak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v}(x-2\sqrt{y}, x+2\sqrt{y}) + \frac{\partial F}{\partial u}(x-2\sqrt{y}, x+2\sqrt{y})\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\cdot 1\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\cdot 1\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\ .$$

Podobně

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial F}{\partial v}(x-2\sqrt{y}, x+2\sqrt{y}) - \frac{\partial F}{\partial u}(x-2\sqrt{y}, x+2\sqrt{y})\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2y^{3/2}}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2y^{3/2}}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)\ .$$

Takže

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) =$$

$$= 4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\ .$$

Jak je vidět, výsledný výraz je podstatně jednodušší než výraz původní.

5.8 (vyšší parciální derivace)
Vyjádřete Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

pomocí polárních souřadnic.

Řešení:
Polární souřadnice představují transformaci

$$x(\varrho, \varphi) = \varrho\cos\varphi$$

$$y(\varrho, \varphi) = \varrho\sin\varphi$$

neboli

$$\Phi(\varrho,\varphi) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)$$

s oborem hodnot v našem případě voleným jako

$$D(\Phi):\ \varrho \in (0,+\infty)\ \&\ \varphi \in (-\pi,\pi)\ .$$

Označme si

$$F = f \circ \Phi : (0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$$

takže zderivováním dostaneme

$$F'(\varrho,\varphi) = f'(x,y) \circ \Phi'(\varrho,\varphi)$$

kde $(x,y) = \Phi(\varrho,\varphi)$. Zapsáno pomocí matic to je

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

a zinvertováním matice transformace dostaneme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\varrho} & \frac{\cos\varphi}{\varrho} \end{pmatrix}$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi}\ .$$

Poznámka: Toto vyjádření bychom také dostali pomocí řetízkového pravidla aplikovaného na funkci

$$f(x,y) = F\Big(\varrho(x,y), \varphi(x,y)\Big)\ .$$

Tím dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\ .$$

K tomu ještě potřebujeme znát derivaci inverzního zobrazení, což dostaneme stejně jako výše:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial x} & \frac{\partial \varrho}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \Big(\Phi^{-1}\Big)'(x,y) = \Big(\Phi'\Big)^{-1}(\varrho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\varrho} & \frac{\cos\varphi}{\varrho} \end{pmatrix}\ .$$

K získání druhých derivací teď stačí jen používat vztahy, co máme. Pokud ale budeme pouze mechanicky derivovat, výpočet se stane dost dlouhý a nepřehledný:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\cos\varphi) \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\varphi}{\varrho}\right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \cdots$$

Pomůžeme si proto menším trikem: Výrazy s parciálními derivacemi budeme chápat jako operátory, tj. zobrazení, které dané funkci přiřadí jinou funkci. Pro jednoduchost si definujme operátor D jako

$$D(F) := \left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(F)\ .$$

Pak můžeme rovnost

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho}(\varrho,\varphi) - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varrho,\varphi)$$

kde $F = f \circ \Phi$, zapsat jako

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \Phi = D(f \circ \Phi)$$

čímž ihned dostaneme

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \circ \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \circ \Phi = D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \Phi\right) = D\left(D(f \circ \Phi)\right) =$$

$$= \left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\ .$$

Teď už stačí jen rozepsat příslušný výraz:

$$\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho}\right) - \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho}\right) + \frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \cos^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varrho} +$$

$$+ \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} =$$

$$= \cos^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\ .$$

Podobně máme

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \circ \Phi = \left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)$$

a rozepsáním dostaneme

$$\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho}\right) + \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho}\right) + \frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \sin^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varrho} -$$

$$- \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} =$$

$$= \sin^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varrho} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi}\ .$$

Sečtením pak dostaneme

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \circ \Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} .$$

Laplaceova rovnice má tedy v polárních souřadnicích tvar

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} = 0$$

nebo ekvivalentně

$$\varrho^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \varrho \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0 .$$

Doplňující vysvětlení: Co to znamená vyjádřit nějaký výraz (případně rovnici) v jiných souřadnicích? Představme si to tak, že v $\mathbb{R}^n$ "žije" funkce f (tj. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Prostor $\mathbb{R}^n$ (nebo jeho část) můžeme ale popisovat také pomocí jiných (křivočarých) souřadnic $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je vhodná množina. Je to podobné, jako když nějaké území na Zemi zachycujeme na různých mapách. A stejně jako nějaká oblast na Zemi vypadá na různých mapách vždy trochu jinak, stejně tak se funkce f vyjádřená pomocí souřadnicového popisu Φ bude také pokaždé jevit jinak (půjde totiž o funkci $f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$).

A pokud jsme v našem případě funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

přiřadili funkci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(popsanou standardními souřadnicemi), pak chceme vědět, jak bude vypadat odpovídající přiřazení v polárních souřadnicích, kdy funkci

$$f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$$

přiřazujeme funkci

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \circ \Phi : G \to \mathbb{R} .$$

Posledně zmíněnou funkci ovšem chceme vyjádřit pomocí derivací podle nových souřadnic. Jak je vidět, i přes složení funkce f se zobrazením Φ, jde vlastně pořád o tentýž "objekt", tj. tutéž "funkci" na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Polární souřadnice představují transformaci

$$x(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi$$
$$y(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi$$

neboli

$$\Phi(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) .$$

Obor hodnot $G = D(\Phi)$ zvolíme tak, aby

- G byla otevřená množina,
- Φ bylo na G bijektivní
- obor hodnot zobrazení Φ zachytil co největší část prostoru $\mathbb{R}^2$.

Možných voleb G je více podle toho, kterou část prostoru $\mathbb{R}^2$ potřebujeme zachytit, ovšem bod $(0, 0)$ musíme v tomto případě vynechat vždy - ledaže bychom uvažovali posunuté polární souřadnice. V zadání žádná konkrétní volba zmíněna nebyla, takže si zvolíme třeba

$$G : \ \varrho \in (0, +\infty) \ \& \ \varphi \in (-\pi, \pi) .$$