6. cvičení z Matematické analýzy 2

27. - 31. března 2017

6.1 (derivace implicitní funkce)
Spočítejte první dvě derivace funkce $y(x)$, která je řešením

(i) rovnice $e^y + xy - e = 0$ v okolí bodu $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(ii) rovnice $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ v okolí bodu $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Najděte také Taylorův polynom řádu 2 pro tyto funkce $y(x)$ v okolí daných bodů x_0.

Řešení:

Věta o implicitní funkci: Nechť funkce Φ je spojitě diferencovatelná až do k-tého řádu na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Jestliže pro $(x_0, y_0) \in G$ je $\Phi(x_0, y_0) = 0$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, pak na nějakém intervalu $U \subseteq \mathbb{R}$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje funkce $y(x) : U \to \mathbb{R}$, která je spojitě diferencovatelná až do k-tého řádu taková, že $\Phi(x, y(x)) = 0$ a $y(x_0) = y_0$.

(i) Daný bod $(x_0, y_0) = (0, 1)$ zřejmě splňuje rovnici. Funkci $y(x)$ sice neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její derivace. Na obě strany rovnosti použijeme $\frac{d}{dx}$, přičemž využijeme řetízkové pravidlo (y je závislé na proměnné x):

$$0 = \frac{d\,0}{dx} = \frac{d(e^{y(x)} + x \cdot y(x) - e)}{dx} = e^{y(x)} y'(x) + y(x) + x \cdot y'(x)$$

a odsud si derivaci vyjádříme:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{e^{y(x)} + x}$$

Takže pro $x_0 = 0$ a $y(x_0) = y_0 = 1$ máme

$$y'(x_0) = -\frac{y_0}{e^{y_0} + x_0} = -\frac{1}{e} \; .$$

Druhou derivaci pak už spočítáme standardně:

$$y''(x) = \left(-\frac{y(x)}{e^{y(x)} + x}\right)' = -\frac{y'(x)(e^{y(x)} + x) - y(x)e^{y(x)}}{(e^{y(x)} + x)^2}$$

takže

$$y''(x_0) = -\frac{-\frac{1}{e} \cdot e - e}{e^2} = \frac{e+1}{e^2}$$

Taylorův rozvoj 2. řádu funkce $y(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$ tak je

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) \cdot x^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{e} \cdot x + \frac{e+1}{2e^2} \cdot x^2 + o(x^2) \; .$$

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i), jen už nebudeme pro větší přehlednost vyznačovat explicitní závislost funkce y na x. Daný bod $(x_0, y_0) = (1, 1)$ opět splňuje rovnici. Na obě strany rovnosti použijeme opět $\frac{d}{dx}$:

$$0 = \frac{d\,1}{dx} = \frac{d(x^3 + y^3 - 3xy)}{dx} = 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3x \cdot y'$$

a odsud si derivaci vyjádříme:

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Takže pro $x_0 = 1$ a $y(x_0) = 0$ máme

$$y'(x_0) = 1 \ .$$

Druhá derivace:

$$y'' = \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)' = \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}$$

takže

$$y''(x_0) = \frac{(-1)(-1) - (-1)(-1)}{(-1)^2} = 0$$

Taylorův rozvoj 2. řádu funkce $y(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$ tak je

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big) =$$

$$= x - 1 + o\Big((x - 1)^2\Big) \ .$$

6.2 (derivace implicitní funkce)

Spočítejte první dvě derivace funkce $z(x, y)$, která je řešením rovnice $x + y + z^2 - e^z = 0$ v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$.

Řešení:

Věta o implicitní funkci (dvou proměnných): Nechť funkce Φ je spojitě diferencovatelná až do k-tého řádu na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Jestliže pro $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, pak na nějakém okolí $U \subseteq \mathbb{R}$ bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existuje funkce $z(x, y) : U \to \mathbb{R}$, která je spojitě diferencovatelná až do k-tého řádu taková, že $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$ a $z(x_0, y_0) = z_0$.

Funkci $z(x, y)$ opět neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její parciální derivace. Na obě strany rovnosti použijeme $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$, přičemž využijeme řetízkové pravidlo (z je závislé na proměnných x a y):

$$0 = \frac{\partial\, 0}{\partial x} = \frac{\partial(x + y + z^2(x, y) - e^{z(x,y)})}{\partial x} = 1 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - e^z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial\, 0}{\partial y} = \frac{\partial(x + y + z^2(x, y) - e^{z(x,y)})}{\partial y} = 1 + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - e^z \frac{\partial z}{\partial y}$$

a odsud si parciální derivace vyjádříme:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^z - 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 2z}$$

Zřejmě pro $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$ je $e^{z_0} - 2z_0 = 1 \neq 0$, takže derivace $z'(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ je definována na nějakém okolí bodu $(x_0, y_0) = (2, -1)$. Konkrétně je $z'(2, -1) = (1, 1)$.

Další derivace získáme už standardně:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z - 2z}\right) = -\frac{e^z - 2}{(e^z - 2z)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^z - 2}{(e^z - 2z)^3}$$

a ze symetrie zadání pak máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^z - 2}{(e^z - 2z)^3}\ .$$

Speciálně máme

$$z''(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3 (Taylorův polynom)
Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

(i) funkci $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ v okolí bodu $a_0 = (0,0)$.

(ii) funkci $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ v okolí bodu $a_0 = (2,1)$.

Řešení:
Taylorův polynom řádu 2, který aproximuje funkci f v bodě a_0, je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\mathbf{h}] + \frac{1}{2!} f''(a_0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}]$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Máme

$$f'(a_0) = \left(e^x \ln(1+y),\ \frac{e^x}{1+y}\right)_{|a_0} = (0,1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} e^x \ln(1+y) & \frac{e^x}{1+y} \\ \frac{e^x}{1+y} & -\frac{e^x}{(1+y)^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 0 + (0,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= h_2 + h_1 h_2 - \frac{1}{2} h_2^2.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = \left(-\frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2}\right)_{|a_0} = (-1,1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-y)^3} & -\frac{2}{(x-y)^3} \\ -\frac{2}{(x-y)^3} & \frac{2}{(x-y)^3} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0+\mathbf{h}) = 1 + (-1,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - h_1 + h_2 + h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2.$$

6.4 (Taylorův polynom)

Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu a_0:

(i) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a_0 = (1,2,1)$,

(ii) $f(x,y,z) = xe^y\cos z$, $a_0 = (0,0,0)$.

Řešení:

(i) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu. Máme

$$f'(a_0) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)_{|a_0} = (4,4,12)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0+\mathbf{h}) = 4 + (4,4,12)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2.$$

Polynom lze v tomto případě také získat přímo dosazením do původní funkce, kde si v rozvoji vezmeme pouze členy do stupně nejvýše 2:

$$f(1+h_1, 2+h_2, 1+h_3) = (1+h_1)(2+h_2)^2(1+h_3)^3 = (1+h_1)(4+4h_2+h_2^2)(1+3h_3+3h_3^2+h_3^3) =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2 + \text{vyšší členy}.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y\cos z, xe^y\cos z, -xe^y\sin z)_{|a_0} = (1,0,0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y\cos z & -e^y\sin z \\ e^y\cos z & xe^y\cos z & -xe^y\sin z \\ -e^y\sin z & -xe^y\sin z & -xe^y\cos z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0+\mathbf{h}) = h_1 + h_1h_2.$$

Polynom lze i v tomto případě také získat rozvojem jednotlivých funkcí jedné proměnné v daných bodech:

$$e^{h_2} = 1 + h_2 + \varphi(h_2)$$

$$\cos h_3 = 1 + \psi(h_3)$$

kde $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ a $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0$.

$$f(0+h_1, 0+h_2, 0+h_3) = h_1 e^{h_2} \cos h_3 = h_1\Big(1 + h_2 + \varphi(h_2)\Big)\Big(1+\psi(h_3)\Big) =$$

$$= h_1 + h_1 h_2 + \Omega(\mathbf{h})$$

kde $\Omega(\mathbf{h}) = h_1\varphi(h_2) + (h_1 + h_1h_2 + h_1\varphi(h_2))\psi(h_3)$.

Ukážeme, že platí $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\Omega(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||^2} = 0$ a tedy jsme skutečně tímto způsobem našli hledaný Taylorův polynom:

$$\frac{|\Omega(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||^2} \le \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|h_1h_2|}{||\mathbf{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1h_3|}{||\mathbf{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1h_2h_3|}{||\mathbf{h}||^2} + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1h_2h_3|}{||\mathbf{h}||^2} \le$$

$$\le \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}||\mathbf{h}|| + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}||\mathbf{h}|| \to 0$$

pro $\mathbf{h} \to 0$, protože $|h_i| \le ||\mathbf{h}||$ pro všechna $i = 1,2,3$. Uvedené odhady platí i když je náhodou $h_i = 0$ pro nějaké $i = 1,2,3$.

6.5 (lokální extrémy)

Nalezněte lokální extrémy funkcí

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(ii) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

(iii) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x,y,z > 0$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1,1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\mathbf{h},\mathbf{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (1,1)$ je $f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3$).

(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'(x,y) = \big(6x^2 + y^2 + 10x,\ 2xy + 2y\big)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $6x^2+y^2+10x = 0$ a $(x+1)y = 0$. To nastává právě když $(x,y) = (-1,\pm 2)$ nebo $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = \big(-\frac{5}{3}, 0\big)$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$$

• Pro $(x,y) = (-1,\pm 2)$ je $f''(-1,\pm 2) = \begin{pmatrix} -2 & \pm 4 \\ \pm 4 & 0 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = -16 < 0$) je forma indefinitní a tedy v daných bodech je SEDLO.

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Forma je zřejmě pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM.

• Pro $(x,y) = \big(-\frac{5}{3}, 0\big)$ je $f''\big(-\frac{5}{3}, 0\big) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. Forma je zřejmě negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM.

Protože např. zúžení funkce $f(x,0) = 2x^3 + 5x^2$ nabývá všech hodnot (stačí zjistit její limity v nekonečnech), tak všechny nalezené extrémy jsou pouze lokální, ale ne globální.

(iii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $f'(x,y,z) = 0$ právě když $y^2 = 4x^2$ a $y^3 = 2xz^2$ a $y = z^3$. Řešení pro $x,y,z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \big(\frac{1}{2}, 1, 1\big)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y,z) = \big(\frac{1}{2}, 1, 1\big)$ je

$$f''\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivací pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

6.6 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

(ii) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$,

(iii) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = -4h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM. Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 6$).

(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'(x,y) = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $(x,y) = (2,-1)$. Druhá derivace

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v $(2,-1)$ je (ostré) lokální MINIMUM $f(2,-1) = -6$. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. *kvadrik*) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y =$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4}y + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 2 \cdot \frac{3}{4}y \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}(y+1)^2 - 6$$

Tedy skutečně $f(x,y) \geq -6$ a rovnost nastává pro $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$ a $y + 1 = 0$ neboli $(x,y) = (2,-1)$.

(iii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 12 \cdot h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$f''\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.