7. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. dubna 2017

7.1 (lokální extrémy)
Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{(1+x)^2(1-y)^2}$.

Řešení:
Nejdříve zjistíme, kde je funkce diferencovatelná. Zřejmě

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{(y-1)^2}{x+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{y-1}}$$

pro všechna (x,y) z množiny

$$U: \quad x \neq -1 \quad \& \quad y \neq 1\ .$$

Pokud je tedy bod $(x,y) \in U$ lokálním extrémem funkce, musí platit, že $f'(x,y) = 0$, což ale, jak je ihned vidět, nemůže nastat. Na množině U tedy lokální extrémy nejsou.

Zbývá vyšetřit body na přímkách $x = -1$ a $y = 1$. Máme zřejmě $f(-1,y) = f(x,1) = 0$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Na druhou stranu je $f(x,y) > 0$ pro $(x,y) \in U$.

Ve všech bodech množiny $\mathbb{R}^2 \setminus U$ (tedy na přímkách $x = -1$ a $y = 1$) jsou proto neostrá (dokonce globální) minima. Jiné extrémy zde nejsou.

7.2 (lokální extrémy)
Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$.

Řešení:
Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y,z) = \Big(3x^2 - 3y,\ 2y - 3x - 2,\ z + 2\Big)$$

Tedy $f' = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ 2y & = & 3x + 2 \\ z & = & -2 \end{array}$$

což je právě když $(x,y,z) = (2,4,-2)$ nebo $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Pro $(x,y,z) = (2,4,-2)$ je

$$f''(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

Pro $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$ je

$$f''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x, 0, 0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.

7.3 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty

(i) funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,

(ii) funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$,

(iii) funkce $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:

Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \;\&\; \Phi'(a) \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \ldots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

(i) V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^2$ a $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Protože

$$\Phi'(x, y) = \Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

tak $\Phi'(x, y)$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'(x, y) = 0$) právě když $(x, y) = (0, 0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x, y) = 0$ a $\Phi'(x, y) = 0$. Takže v každém bodě množiny

$$M : \quad 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$$

je $\Phi'(x, y)$ regulární. Pro bod $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1, -1), \quad (-1, 1)$$

s hodnotami

$$f(1, -1) = 5, \quad f(-1, 1) = 1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma $Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1, -1)$ a $(-1, 1)$.

(ii) Doplněním na čtverec snadno zjistíme, že vazba představuje kružnici

$$M : \quad (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3$$

tedy omezenou uzavřenou množinu. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro

$$\Phi(x, y) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3\ .$$

Protože

$$\Phi'(x, y) = \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

tak $\Phi'(x, y)$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'(x, y) = 0$) právě když $(x, y) = (1, -1)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x, y) = 0$ a $\Phi'(x, y) = 0$. Takže v každém bodě množiny M je $\Phi'(x, y)$ regulární. Pro extrém $a = (x, y)$ na M tak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x, 4y) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

a

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3.$$

Vyjádříme $x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ a $y = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$ pomocí λ (zřejmě $\lambda \neq 1$ jinak by rovnice neměly řešení) a dosadíme do vazby. Dostaneme $(\lambda - 1)^2 = 1$ s řešením $\lambda \in \{0, 2\}$ a kandidáty na extrémy:

$$(2, -2)\,, \quad (0, 0)$$

s hodnotami

$$f\,(2, -2) = 12, \quad f\,(0, 0) = 0.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

(iii) Útvar je sféra s poloměrem 1. Položíme

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1\ .$$

Protože

$$\Phi'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

tak $\Phi'(x,y,z) = 0$ právě když $(x,y,z) = (0,0,0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

je $\Phi'(x,y,z) \neq 0$. Pro bod $a = (x,y,z) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-2,2) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Proto musí být $\lambda \neq 0$ a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda} \qquad y = -\frac{1}{\lambda} \qquad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do vazby získáme řešení $a = \pm\frac{1}{3}(1,-2,2)$ a $\lambda = \pm\frac{3}{2}$. Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 3$.

7.4 (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

(i) $x + y + z = 5$ a $xy + yz + zx = 8$.

(ii) $x + y + z = 0$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení:

(i) Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x,y,z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x,y,z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x+y)(5-x-y) = 8$$
$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$
$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = x^2+y^2+z^2+2\cdot 8$$
$$x^2+y^2+z^2 = 5^2 - 2\cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (y+z, z+x, x+y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y+z = z+x = x+y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y+z, z+x, x+y)$$

a

$$x+y+z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy+yz+zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + \mu(y+z)$$

$$zx = \lambda + \mu(z+x)$$

dostaneme $z(y-x) = \mu(y-x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \qquad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \qquad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x+y+z$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1.$$

$$M: \qquad \Phi_1(a) = 0 \ \& \ \Phi_2(a) = 0\ .$$

uzavřenost M: stejné zdůvodnění jako v (i).

omezenost M: Jedna z vazeb představuje sféru, takže i M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (2x, 2y, 2z)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 0$ a $3x^2 = 1$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme korektně použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x + y + z = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Když opět od sebe odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + 2\mu x$$

$$zx = \lambda + 2\mu y$$

dostaneme $z(y - x) = 2\mu(x - y)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = 2\mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = 2\mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = 2\mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

a

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = -\frac{\sqrt{6}}{18}\ .$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech maximum a v druhých minimum.

7.5 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem)
Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A : \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Jestliže $a = (x, y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$T'(a) = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a skutečně je pak $a \in A^\circ$.

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na

$$\partial A : \quad \Phi(x, y) = 0$$

kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = T'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right),\ (1, 0),\ (-1, 0),\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.