8. cvičení z Matematické analýzy 2

10. - 14. dubna 2017

8.1 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)
Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$.

Řešení:
Množina $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\}$ je čtverec a je zřejmě omezená i uzavřená (je vzorem uzavřeného intervalu $(-\infty, 1\rangle$ při spojitém zobrazení $\Psi(x,y) = |x| + |y|$).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$

a vázaného extrému na množině

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\},$$

kterou ale tentokrát nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou čtyři otevřené úsečky (hrany čtverce) a čtyři body (vrcholy čtverce). Procházení těchto možností si usnadníme použitím symetrií $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takových, že zachovávají jak množinu ∂A, tak danou funkci f. Tedy má platit, že $\varphi(\partial A) = \partial A$ a $f \circ \varphi = f$.

Můžeme si zvolit tyto tři (neidentické) symetrie:

$$(x,y) \mapsto (-x,-y) \qquad \textit{(středová souměrnost)}$$

$$(x,y) \mapsto (y,x) \qquad \textit{(souměrnost podle osy } x = y\textit{)}$$

$$(x,y) \mapsto (-y,-x) \qquad \textit{(souměrnost podle osy } x = -y\textit{)}$$

Extrém na A°:

$f'_{|a} = (2x - y, 2y - x) = 0$ nastává právě pro $a = (0,0) \in A^\circ$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Extrém na ∂A:

Díky symetriím stačí vyšetřit extrém na

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\} \text{ s vazbou } \Phi_1(x,y) = x + y - 1$$

a na

$$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\} \text{ s vazbou } \Phi_2(x,y) = x - y - 1$$

tj. hrany čtverce A bez koncových bodů (a dále už pak jen vrchol $(1,0)$ čtverce A jako samostatnou vazbu).

Pro extrém na U_1 má tedy existovat $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a} = \lambda_1 \Phi'_{1|a} = \lambda_1(1,1)$$

a

$$x + y = 1,$$

tedy $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in U_1$ a $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Podobně pro extrém na U_2 má existovat $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a} = \lambda_2 \Phi'_{2|a} = \lambda_2(1, -1)$$

a

$$x - y = 1,$$

tedy $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in U_2$ a $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Zbývá bod $(1, 0)$ s hodnotou $f(1, 0) = 1$.

Minimum tedy nabývá funkce v bodě $(0, 0)$ a maximum ve vrcholech čtverce (které jsme získali z bodu $(1, 0)$ pomocí symetrií).

8.2 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině

$$M: \quad x \geq 0 \ \& \ y \geq 0 \ \& \ x + y \leq 6 \ .$$

Řešení:

Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(6, 0)$ a $(0, 6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \& \ 0 \leq x \leq 6) \ \vee \\ (x = 0 \ \& \ 0 \leq y \leq 6) \ \vee \\ (x + y = 6 \ \& \ 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hrany trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníku).

Extrém na M°:

$$f' = \left(8xy - 3x^2 y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2 y\right) = (0, 0)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y \ .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2, 1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2, 1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6 - t) \ \text{ pro } \ t \in (0, 6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6-t)$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := -24t + 2t^3 = 6t(t-4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$. Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minimum v bode $(4,2)$.

8.3 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \leq y \leq 4\ .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \quad \& \quad -2 \leq x \leq 2) \quad \vee \\ (y = 4 \quad \& \quad -2 \leq x \leq 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka) a dva body (kde se obě křivky protínají).

Extrém na M°:

$$f' = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x\ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách je nejvhodnější zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• na části hyperboly vyšetřujeme funkci

$$g_1(x) := f(x, x^2) = 4x^2 + x^4 \quad \text{pro} \quad x \in (-2, 2) \ .$$

Máme $g_1'(x) = 8x + 4x^3 = 0$ právě když $x = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• na úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_2(x) := f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 - 4x + 16 \quad \text{pro} \quad x \in (-2, 2) \ .$$

Rovnice $g_2'(x) = 6x^2 + 8x - 4 = 0$ nemá řešení, takže žádné podezřelé body tímto nedostáváme.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2, 4)$ a $(2, 4)$ s hodnotami $f(-2, 4) = f(2, 4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2, 4)$ a $(2, 4)$ a minimum v bodě $(0, 0)$.

8.4 (vázané extrémy - aplikace)
Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Hledáme sice jen kladná čísla, ale pro využití věty o nabytí maxima (a minima) spojité funkce je potřeba pracovat s množinou, která je *uzavřená* (a omezená). Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \ \& \ x + y + z = 100\},$$

(což je trojúhelník i s okraji), tj. hledáme *nezáporná* čísla. Množina A je zřejmě uzavřená a omezená.

Vyšetření rozdělíme na obvyklý vázaný extrém v otevřené množině

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\},$$

tedy na $A \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$ s vazbou $\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$ (trojúhelník bez okrajů) a na případ $A \setminus U$ (okraje trojúhelníka).

Na okrajích trojúhelníka je funkce f nulová a zřejmě tu nabývá svého minima (protože na zbytku množiny A je f nenulová).

Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in A \cap U$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100,$$

takže $a = \frac{100}{3}(1, 1, 1)$ a $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$ a tento bod je tak jediným bodem maxima funkce f na A.

8.5 (vázané extrémy - aplikace)

Určete rozměry obdélníka daného obvodu $2p$, který rotací kolem jedné strany vytvoří těleso s maximálním objemem.

Řešení:
Označme strany obdélníka jako a a b a rotujme ho podle strany b. Vyšetřujeme tedy maximum funkce

$$V(a,b) = \pi a^2 b \ \ \text{(objem tělesa)}$$

za předpokladu

$$M: \quad 2(a+b) = 2p \quad \& \quad a,b \geq 0\ .$$

. Zřejmě je vhodné si množinu prostě zparametetizovat a vyšetřovat tak extrémy funkce

$$g(a) = V(a, p-a) = \pi a^2 (p-a) \ \text{ pro } \ a \in \langle 0, p \rangle.$$

Na otevřeném intervalu $(0,p)$ musí extrém splňovat $g'(a) = \pi(2ap - 3a^2) = 0$, tedy $a = \frac{2p}{3}$ (a $b = \frac{p}{3}$) s hodnotou $V(\frac{2p}{3}, \frac{p}{3}) = \frac{4\pi p^2}{27}$.

V krajních bodech intervalu (které jsou také podezřelé) je zřejmě $V(p,0) = V(0,p) = 0$. Takže maximální objem je pro $a = \frac{2p}{3}$ a $b = \frac{p}{3}$.

8.6 (vázané extrémy - vzdálenost)

Na elipse $M: \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p: \ 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:
Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x,y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$ (pro $\mathbb{R}^2$ je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v $\mathbb{R}^3$ má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovině ρ. Vzdálenost bodu $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left| (a-b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right|.$$

Protože bod b je v rovině ρ, platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left| (a-b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x,y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x,y) = 10 \cdot \Big(f(x,y) \Big)^2 = (3x + y - 9)^2$$

(snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $3x+y-9$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x,y) = 3x + y - 9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 (= 0)$ je zřejmě $\operatorname{grad}(\Phi) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) \neq 0$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(3,\ 1) = \operatorname{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 3 \cdot \lambda\frac{2y}{9},$$

tedy $\lambda = 0$ nebo $y = \frac{3}{4}x$.

Pokud $\lambda = 0$, pak platí $3x + y - 9 = 0$ a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p, který je ale prázdný.

Takže zbývá případ $y = \frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x,y) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

(2) Použijeme "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

Tvrzení: Pokud je množina M (daná vazbou)

- *uzavřená,*
- *omezená* a
- *má tečny ve všech svých bodech,*

pak body z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a = (x,y) \in M$ je gradientem funkce Φ. Hledáme tedy body $a = (x,y) \in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \cdot (3,1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y = \frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

Poznámka: Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M, pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale *NENÍ uzavřená*: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je formálně z postupu získali).
- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale *NENÍ omezená*: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale *NEMÁ tečny ve všech svých bodech*: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník) (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).

(3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x, y) a (u, v) jako

$$h(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a $3u + v - 9 = 0$. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dvě vazby

$$\Phi_1(x, y, u, v) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

a

$$\Phi_2(x, y, u, v) = 3u + v - 9$$

s gradienty

$$\mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right)$$

$$\mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = (0, 0, 3, 1)$$

kde $a = (x, y, u, v)$. Označme si

$$K = \{a \in \mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \&\ \Phi_2(a) = 0\}.$$

Pro body $a \in K$ jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(2(x-u), 2(y-v), 2(u-x), 2(v-y)\Big) = \mathrm{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right) + \mu \cdot (0, 0, 3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{a} \quad 3u + v - 9 = 0$$

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 2(x - u) = -3\mu$$

$$\lambda\frac{2y}{9} = 2(y - v) = -\mu$$

tedy opět rovnici $\lambda\left(\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}\right)=0$, kde případ $\lambda=0$ opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(x_2,y_2)=-\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

a pomocí rovnice $x-u=3(y-v)$ dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1,v_1)=\left(\frac{27\sqrt{5}-9}{10\sqrt{5}},\frac{9\sqrt{5}+27}{10\sqrt{5}}\right)$$

$$(u_2,v_2)=\left(\frac{27\sqrt{5}+9}{10\sqrt{5}},\frac{9\sqrt{5}-27}{10\sqrt{5}}\right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdáleností) bodů $a_i=(x_i,y_i,u_i,v_i)$ platí

$$h(a_1)<h(a_2).$$

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro $a\in K$ a $\|a\|\to\infty$ jdou hodnoty $h(a)$ také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině $K\cap(\mathbb{R}^4\setminus B)$ byly hodnoty funkce h větší než např. $h(a_2)+1$. A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině $K\cap B$ bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině $K\cap\partial B$ budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě $h(a_2)+1$ (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na $K\cap(\mathbb{R}^4\setminus B)$).
- Na množině $K\cap B^\circ$ (díky otevřenosti množiny B°) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body a_1 a a_2 (které se evidentně musí nacházet v $K\cap B^\circ$ díky svým funkčním hodnotám$h(a_1)<h(a_2)<h(a_2)+1$).
- Absolutní minimum funkce h na množině $K\cap B$ se tedy NEMŮŽE nacházet na "okraji" $K\cap\partial B$ protože tam je funkce "moc velká" a může to tedy být jedině bod a_1. Současně i na množině $K\cap(\mathbb{R}^4\setminus B)$ je funkce "moc velká," a bod a_1 je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K.

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce "v nekonečnu roste do nekonečna."

A co bod a_2? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

8.7 (vázané extrémy - vzdálenost)

Najděte vzdálenost paraboly $M:\ y=x^2$ od přímky $p:\ y=x-2$.

Řešení:
Můžeme použít některý z předchozích postupů, ale musíme si uvědomit, že parabola není omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p i zde "v nekonečnu roste do nekonečna." Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p: \; x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce

$$\rho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

8.8 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(a) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\; dy\; dx$

(b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x, y)\; dy\; dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\; dy\; dx$

(c) $\int\limits_0^{2a} \int\limits_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\; dy\; dx$, kde $a > 0$ je parametr.

Řešení:
Použijeme **Fubiniho větu:** Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce (tj. funkce, kterou má smysl vůbec integrovat, např. spojitá) a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_D |f|\; dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a D je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_D f\; dS$ a platí

$$\int\limits_{\pi_2(D)} \Big(\int\limits_{(\mathbb{R}\times\{y\})\cap D} f(x, y)\; dx \Big)\; dy = \iint\limits_D f\; dS = \int\limits_{\pi_1(D)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap D} f(x, y)\; dy \Big)\; dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x, y) = x$ a $\pi_2(x, y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

na $D = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \setminus \{(0, 0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\,dy = \Big[-\arctan(y)\Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy = \infty.$$

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(i) Základní oblast integrace je

$$D: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi\rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x\rangle.$$

Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(D) = \langle 0, 1\rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \le \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$, takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y\rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(ii) Základní oblasti integrace jsou

$$D_1: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x$$

$$D_2: \quad 1 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 2 - x.$$

Množiny D_1 a D_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1\rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $D = D_1 \cup D_2$.

Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

$$\iint_{D_1} f\ dS \ + \ \iint_{D_2} f\ dS = \iint_{D_1 \setminus D_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint_{D_1 \cap D_2} f\ dS \ + \ \iint_{D_2 \setminus D_1} f\ dS$$

Takže $\pi_2(D) = \langle 0, 1\rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle y, 2-y\rangle$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(iii) Základní oblast integrace je

$$D: \quad 0 \le x \le 2a \quad \& \quad \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}.$$

Oblast je tedy se shora omezená parabolou $y^2 = 2ax$ a že zdola polovinou kružnice $2ax - x^2 = y^2$ (neboli ekvivalentně $(x-a)^2 + y^2 = a^2$). Rozdělíme si ji na tři části (tento návod poskytuje obrázek)

$$D_1 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge a\}$$

$$D_2 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le a \ \ \& \ \ x \le a\}$$

a

$$D_3 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le a \ \ \& \ \ x \ge a\}.$$

Teď si oblasti D_i vyjádříme podle řezu v proměnné x (pomocí křivek $y^2 = 2ax$ a $(x-a)^2 + y^2 = a^2$):

D_1 :

$$a \le y \le 2a, \qquad \frac{y^2}{2a} \le x \le a$$

D_2 :

$$0 \le y \le a, \qquad \frac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

D_3 :

$$0 \le y \le a, \qquad a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a$$

Takže výsledek je

$$\iint_D f\ dS = \iint_{D_1} f\ dS \quad + \quad \iint_{D_2} f\ dS \quad + \quad \iint_{D_3} f\ dS =$$

$$= \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a} f(x,y)\ dx\ dy \quad + \quad \int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\ dx\ dy \quad + \quad \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\ dx\ dy\ .$$