9. cvičení z Matematické analýzy 2

17. - 21. dubna 2017

9.1 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu:

(i)

$$\iint_E x\cos(x^2+y)\ dS$$

kde $E: \quad -\sqrt{\pi} \le x \le 0 \quad \& \quad 0 \le y \le \pi.$

(ii)

$$\iint\limits_E e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\ dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

(iii)

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS,$$

kde E je oblast v prvním kvadrantu omezená křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

(iv)

$$\iint\limits_E \frac{\sin x}{x}\ dxdy$$

kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Řešení:
(i) Oblast E je obdélník. Můžeme použít integraci jak podle x tak podle y:

$$\iint_E x\cos(x^2+y)\ dS = \int\limits_0^\pi \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 x\cos(x^2+y)\ dx\ dy = \int\limits_0^\pi \left[\frac{\sin(x^2+y)}{2}\right]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin(y) - \sin(y+\pi)\ dy = \int\limits_0^\pi \sin(y)\ dy = \Big[-\cos(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} = 2$$

nebo

$$\iint_E x\cos(x^2+y)\ dS = \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 \int\limits_0^\pi x\cos(x^2+y)\ dy\ dx = \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 \Big[x\sin(x^2+y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 x\sin(x^2+\pi) - x\sin(x^2)\ dx = \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 -2x\sin(x^2)\ dx = \Big[\cos(x^2)\Big]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} = 2\ .$$

(ii) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy - y^2 = y(x-y) \geq 0$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 10y$$

$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\, dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy - y^2)^{3/2}}{y} \right]_{x=y}^{x=10y} dy =$$

$$= \int_0^1 e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\, dy = 6 \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\, dy = 6 \Big[e^{y^3} \Big]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1)\ .$$

(iii) Oblast integrace

$$E: \quad 0 \leq x \leq y^2 \quad \& \quad 0 < y \leq 1$$

je omezená, ale u funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0,0)$. Přesto ale můžeme použít Fubiniovu větu, protože funkce je nezáporná. Konkrétně:

Fubiniova věta (verze pro neomezené funkce nebo množiny): Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f: E \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce a
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný a oba se rovnají (a funkce má dvojný integrál $\iint_E f\, dS$).

Máme tedy

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[y e^{\frac{x}{y}} \Big]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y e^y - y\, dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $0 \leq x \leq y^2$ a $0 < y$, tak $0 \leq \frac{x}{y} \leq y$ a tedy

$$1 \leq e^{\frac{x}{y}} \leq e^y \to 1 \quad \text{pro} \quad (x,y) \to (0,0)$$

a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje a je konečný.

(iv) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x\ .$$

Máme

$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx = \int_0^1 \sin x\, dx = 1 - \cos(1).$$

9.2 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál:

(i)

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

(ii)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{y^4+1}$$

Řešení:
(i) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D: \quad 0 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 4-x^2 \quad \& \quad y \ne 4.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině D sice není omezená, ale je nezáporná, takže Fubiniovu větu použít můžeme.

Proč funkce není omezená: Množina D je ohraničená parabolou $y = 4-x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku D, tedy vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4-\lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

Poznámka: Připomeňme si ještě, jak je definován integrál $\iint_E f\ dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} |f|\ dS =: \iint_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Po záměně řezů dostaneme vztahy

$$D: \quad 0 \le y < 4 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{4-y}$$

takže dostáváme

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx \Big)\ dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4} \Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8-1}{4}.$$

(ii) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D: \quad 0 \le x \le 8 \quad \& \quad \sqrt[3]{x} \le y \le 2,$$

takže

$$D: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{y^4+1} = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\ dx \Big)\ dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

9.3 (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(i)

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$$

(ii)

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \arctan\frac{y}{x}\, dy\, dx,$$

Řešení:

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, $f : U \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce s konečným integrálem a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U) a
- množina $U \setminus U^\circ$ ($\subseteq \partial U$) má *nulovou míru* (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový; obvykle to jsou křivky, úsečky atd, které mají nulový obsah.)

Pak

$$\iint_{\Phi(U)} f\, dS = \iint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\, dS.$$

(i) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích

$$\Psi : \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

je tvaru

$$U : \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Jakobián je $\det \Psi' = r$ takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS = \iint_U r\cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\, dV = \Big(\int_X f(x)\, dx\Big) \cdot \Big(\int_Y g(y)\, dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$. x

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

což je čtvrtina kruhu, jejíž parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Máme

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \arctan\frac{y}{x}\ dy\ dx = \iint_{E=\Psi(U)} \arctan\frac{y}{x}\ dS = \iint_U r\cdot\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cdot\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int_0^1 r\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\ d\varphi\right) = \frac{\pi^2}{16}\ .$$

9.4 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)

Načrtněte danou křivku a určete velikost plochy E, kterou křivka (zadaná pomocí polárních souřadnic) ohraničuje:

(i) $\rho = 1 + \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$,

(ii) $\rho = |\varphi| + 1, \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

Řešení:
(i) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy se nazývá *kardioida*. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{D=\Phi(U)} 1\ dS = \iint_U r\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\sin\varphi} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1+\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin\varphi)^2\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + 2\sin\varphi + 1)\ d\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

(ii) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad -\pi \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + |\varphi|$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy má tvar srdce (ale není to *kardioida*!). Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} 1\ dS = \iint\limits_{U} r\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\int\limits_{0}^{1+|\varphi|} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=1+|\varphi|}\ d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1+|\varphi|)^2\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} (1+\varphi)^2\ d\varphi = \Big[\frac{(1+\varphi)^3}{3}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{1}{3}\pi^3 + \pi^2 + \pi.$$

9.5 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)

Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\ dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:

V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_{U} r \cdot r\ dS =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \Big(\int\limits_{0}^{1+\cos\varphi} r^2\ dr \Big)\ d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi}\ d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Poznámka: Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = 0$ pro $n \ge 0$.

9.6 (lineární substituce)

S použitím substituce určete

$$\iint\limits_{E} (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\,dA$$

kde E je omezená oblast určená křivkami $y=x$, $y=x-1$, $x+2y=0$, $x+2y=2$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad x-1 \le y \le x, \quad 0 \le x+2y \le 2$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 0 \le x-y \le 1, \quad 0 \le x+2y \le 2\ .$$

Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci Ψ, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{array}{rcl} u &=& x-y \\ v &=& x+2y \end{array}$$

Množina

$$U: \quad 0 \le u \le 1 \quad \& \quad 0 \le v \le 2\ .$$

zřejmě parametrizuje E jako $E=\Psi(U)$. Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = \frac{1}{\det(\Psi^{-1})'} = \frac{1}{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{3}\ .$$

Po substituci pak máme

$$\iint\limits_{E=\Psi(U)} (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\,dA = \iint\limits_{U} v\sqrt[3]{u}\cdot\frac{1}{3}\,du\ dv = \frac{1}{3}\int\limits_0^2\int\limits_0^1 v\sqrt[3]{u}\ du\ dv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 v\ dv\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{u}\ du\right) = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$

9.7 (obecnější křivočaré souřadnice)
Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_{E} \frac{y}{x}e^{xy}\ dS$$

pro množinu E v prvním kvadrantu omezenou křivkami $xy=2$, $xy=4$, $y=2x$ a $y=\frac{x}{2}$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0<x \quad \& \quad 0<y \quad \& \quad \frac{x}{2} \le y \le 2x \quad \& \quad \frac{2}{x} \le y \le \frac{4}{x}$$

neboli

$$E: \quad 0<x \quad \& \quad 0<y \quad \& \quad \frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le 2 \quad \& \quad 2 \le xy \le 4.$$

Vzhledem ke tvaru oblasti i funkce bude výhodné zavést nové souřadnice

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = xy$$

(které odpovídají přímkám procházející počátkem a hyperbolám). Předpis pro nové proměnné ale odpovídá předpokládané inverzi zobrazení Φ, které použijeme pro substituci do našeho integrálu. Měli bychom tedy ještě ověřit, jestli toto zobrazení Φ vůbec existuje a jestli je prosté - vyjádříme tudíž proměnné x a y pomocí proměnných u a v a dostaneme tak (za předpokladu, že $x, y > 0$)

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Definujeme si tedy zobrazení

$$\Phi : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(u,v) = \left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right)$$

jehož inverze je

$$\Phi^{-1} : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{y}{x}, xy\right).$$

Determinant Φ' se snadněji spočítá pomocí inverzního zobrazení (kde se nevyskytují odmocniny):

$$(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \det(\Phi^{-1})' = -2\frac{y}{x}$$

a tedy

$$\det \Phi'_{|(u,v)} = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'_{\;|\Phi(u,v)}} = -\frac{1}{2u}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U : \quad \frac{1}{2} \le u \le 2, \quad 2 \le v \le 4.$$

Můžeme tedy psát

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{y}{x} e^{xy}\, dS = \iint\limits_{U} ue^v \left| -\frac{1}{2u} \right| dS = \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{4} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} e^v \, du \, dv = \frac{3}{4}(e^4 - e^2).$$

9.8 (těžiště plošného útvaru)

Najděte hmotnost a polohu těžiště trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož hustota je rovna $\sigma(x,y) = x$.

Řešení:

Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 4 - 3y.$$

Jednotlivé integrály tedy jsou

hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \sigma \; dS = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} x \; dx\Big) \; dy = \int\limits_0^1 \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \; dy = \frac{1}{2}\Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m}\iint\limits_E x\sigma(x,y) \; dS = \frac{3}{10}\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} x^2 \; dx\Big) \; dy = \frac{1}{10}\int\limits_0^1 \Big[x^3\Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{1}{10}\int\limits_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \; dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40}\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E y\sigma(x,y) \; dS = \frac{3}{10}\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} xy \; dx\Big) \; dy = \frac{3}{20}\int\limits_0^1 \Big[x^2 y\Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{3}{20}\int\limits_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \; dy = \frac{12}{5}\int\limits_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \; dy = \frac{12}{5}\Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{5}.$$