Poznámky k limitám

Věta 0.1. ***(o limitě sevřené funkce)***
Nechť f_1, f_2 *a* f *jsou reálné funkce (na vhodných definičních oborech, které jsou částí* $\mathbb{R}^n$*). Pokud pro* $a_0 \in \mathbb{R}^n$ *a nějaké jeho prstencové okolí* $P_\varepsilon(a_0)$ *platí, že*

- $f_1(a) \leq f(a) \leq f_2(a)$ *pro všechna* $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ *a*
- $\lim\limits_{a \to a_0} f_1(a) = \lim\limits_{a \to a_0} f_2(a) = c \in \mathbb{R}$,

pak $\lim\limits_{a \to a_0} f(a) = c$.

Věta 0.2. ***(o limitě složeného zobrazení)***
Nechť g *je zobrazení z* $\mathbb{R}^n$ *do* $\mathbb{R}^k$ *a* f *je zobrazení z* $\mathbb{R}^k$ *do* $\mathbb{R}^m$ *takové, že má smysl ptát se na limitu složeného zobrazení* $f \circ g$ *v bodě* $a_0 \in \mathbb{R}^n$.
Pokud nyní existují body $b_0 \in \mathbb{R}^k$ *a* $c_0 \in \mathbb{R}^m$ *takové, že*

$$\lim_{a \to a_0} g(a) = b_0 \quad a \quad \lim_{b \to b_0} f(b) = c_0$$

a pokud je splněna alespoň jedna z následujících podmínek

- *existuje prstencové okolí* $P_\varepsilon(a_0)$, *že* $g\Big(P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)\Big)$ *neobsahuje* b_0 *nebo*
- *funkce* f *je v* b_0 *spojitá,*

pak $\lim\limits_{a \to a_0} f\left(g(a)\right) = c_0$.

Věta 0.3. ***(o použití polárních souřadnic)***
Nechť f *je funkce z* $\mathbb{R}^2$ *do* $\mathbb{R}$ *a bod* $a_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ *je hromadným bodem definičního oboru* $D(f)$. *Nechť existuje prstencové okolí* $P_\varepsilon(a_0)$, *hodnota* $c \in \mathbb{R}$ *a funkce* g *z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *taková, že*

$$0 \leq \Big| f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - c \Big| \leq g(r)$$

pro všechna $r \in (0, \varepsilon)$ *a* $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. *Jestliže* $\lim\limits_{r \to 0_+} g(r) = 0$, *pak* $\lim\limits_{a \to a_0} f(a) = c$.

Věta 0.4. ***(postačující podmínka pro neexistenci limity)***
Nechť f *a* g *jsou funkce z* $\mathbb{R}^2$ *do* $\mathbb{R}$ *takové, že platí*

- *bod* a_0 *je hromadný bod definičního oboru* $D(\frac{f}{g})$ *funkce* $\frac{f}{g}$.
- *existuje množina* $M \subseteq \mathbb{R}^2$ *taková, že*
  - *(i)* a_0 *je hromadný bod množiny* M,
  - *(ii) pro každé* $a_1 \in M$ *je* $\lim\limits_{a \to a_1} \left| \frac{f(a)}{g(a)} \right| = \infty$

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{a \to a_0} \frac{f(a)}{g(a)}$.

Důkaz. Označme si $h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$. V každém okolí $U_\varepsilon(a_0)$ bodu a_0 si vezmeme bod $a_1 \in M$, který bude "dost blízko" (např. aby $\|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2$). (Na chvíli připusťme, že limita může být i plus/minus nekonečno.) Protože nyní je $\lim\limits_{(x,y)\to a_1} h(x,y) = \infty$, musí v okolí $U_{\varepsilon/2}(a_1)$ existovat bod $a_2 \in D(h)$ v němž je hodnota $|h(a_2)|$ dostatečně vysoká (větší než libovolná pevně zvolená mez K, tedy $|h(a_2)| \geq K$). Bod a_2 se ale evidentně nachází i v $U_\varepsilon(a_0)$ a to proto, že

$$\|a_2 - a_0\| \leq \|a_2 - a_1\| + \|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

V okolí $U_\varepsilon(a_0)$ (voleném libovolně) tak máme bod, kde je hodnota funkce $h(x,y)$ příliš velká (v absolutní hodnotě). Tudíž funkce $h(x,y)$ nemůže mít v a_0 konečnou limitu. (Ve skutečnosti jiné limity z definice ani neuvažujeme - jen v rámci důkazu a ve formulaci tvrzení jsme je na chvíli z technických důvodů připustili).

Původní (konečná) limita tedy neexistuje. $\square$

Typické použití věty o neexistenci limity: Množina M je nějaká křivka, na které se jmenovatel vynuluje, zatímco čitatel se na téhle křivce nikde nevynuluje (kromě bodu, kam se blížíme).