Vzorový zápočtový test

1. Vyšetřete existenci limity

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y} \ .$$

Znázorněte definiční obor uvedené funkce.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y}$ je

$$D(f): \quad y \neq -|x-1|$$

což znamená, že z roviny musíme vyjmout graf funkce ve tvaru absolutní hodnoty. Bod $(1,0)$ je evidentně hromadným bodem $D(f)$. V limitě se čitatel i jmenovatel blíží k nule. Můžeme zkusit přiblížení po přímkách procházejících tímto bodem tj. přímky tvaru $y = k(x-1)$, kde $k \in \mathbb{R}$ (a přímka $x = 1$). Zjistíme, že všechny dávají limitu 0.

Přesto ale (konečná) limita *neexistuje*. K tomu si stačí uvědomit toto: Na množině

$$M: \quad y = -|x-1|$$

se jmenovatel (tj. funkce $g(x,y) = |x-1|+y$) vynuluje (proto ji také musíme vyjmout z $D(f)$) ale čitatel (tj. funkce $h(x,y) = 4(x-1)^2+3y^2$) je na této množině roven nule právě jen v bodě $a_0 = (1,0)$.

V každém okolí $U_\varepsilon(a_0)$ bodu a_0 si vezmeme bod $a_1 \in M$, který bude "dost blízko" (např. aby $\|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2$). (Na chvíli připusťme, že limita může být i plus/minus nekonečno.) Máme pak tudíž

$$\lim_{(x,y)\to a_1} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to a_1} \frac{|h(x,y)|}{|g(x,y)|} = \infty$$

a to právě kvůli tomu, že $h(a_1) \neq 0$, zatímco $g(a_1) = 0$!

V okolí $U_{\varepsilon/2}(a_1)$ tedy musí existovat bod $a_2 \in D(f)$ v němž je hodnota $|f(a_2)|$ dostatečně vysoká (větší než libovolná pevně zvolená mez K, tedy $|f(a_2)| \geq K$). Bod a_2 se ale evidentně nachází i v $U_\varepsilon(a_0)$, protože

$$\|a_2 - a_0\| \leq \|a_2 - a_1\| + \|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

V okolí $U_\varepsilon(a_0)$ (voleném libovolně) tak máme bod, kde je hodnota funkce $f(x,y)$ příliš velká (v absolutní hodnotě). Tudíž funkce $f(x,y)$ nemůže mít v a_0 konečnou limitu (a jiné limity z definice ani neuvažujeme - jen v rámci důkazu jsme je na chvíli z technických důvodů připustili).

Původní limita tedy neexistuje.

Tento způsob zdůvodnění *neexistence* limity se dá použít i v mnoha jiných případech - stačí mít jen nějakou **křivku ve jmenovateli, která se na něm vynuluje, zatímco v čitateli se nikde nevynuluje (kromě bodu, kam se blížíme)**.

2. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4y + 1$$

na množině

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq (x-1)^2 \ .$$

Situaci načtrněte.

Řešení:
Množina M je část ležící pod parabolou a v prvním kvadrantu (je to takový prohnutý trojúhelník). Zřejmě je omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad rozdělíme (podle obrázku) na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad 0 < x < 1 \quad \& \quad 0 < y < (x-1)^2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = 0 \;\;\&\;\; 0 \le x \le 1) \;\; \vee \\ (x = 0 \;\;\&\;\; 0 \le y \le 1) \;\; \vee \\ (y = (x-1)^2 \;\;\&\;\; 0 \le x \le 1) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři křivky (část paraboly a úsečky) a tři body (kde se křivky protínají).

Extrém na M°:

$$f' = \big(2x + 2y, 2x - 4\big) = (0, 0)$$

nastává právě když $(x, y) = (2, -2)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na daných křivkách je nejvhodnější zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• na části paraboly vyšetřujeme funkci

$$g_1(x) := f\big(x, (x-1)^2\big) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 3 \quad \text{pro} \quad x \in (0, 1) \ .$$

Protože rovnice $g_1'(x) = 2(3x^2 - 7x + 5) = 0$ nemá řešení, opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• na první úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_2(x) := f(x, 0) = x^2 + 1 \quad \text{pro} \quad x \in (0, 1) \ .$$

Ani nemusíme hledat derivaci, aby bylo jasné, že na intervalu $(0, 1)$ je funkce g_2 ostře rostoucí, takže nemá žádné lokální extrémy. Opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• na druhé úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_3(y) := f(0, y) = -4y + 1 \quad \text{pro} \quad y \in (0, 1) \ .$$

Opět nemusíme hledat derivaci, aby bylo jasné, že na intervalu $(0, 1)$ je funkce g_3 ostře klesající, takže nemá žádné lokální extrémy. Opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• zbývají tedy už jen tři průsečíky křivek $(0, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, 0)$ s hodnotami $f(0, 0) = 1$, $f(0, 1) = -3$ a $f(1, 0) = 2$, které představují jediné podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodě $(1, 0)$ a minima v bodě $(0, 1)$.

3. Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_M e^{\max\{x^2, y^2\}} \, dx \, dy \ ,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Situaci načtrněte.

Řešení:
Zjistíme si hodnoty funkce na množině M:

$$e^{\max\{x^2,y^2\}} = \begin{cases} e^{x^2} & \text{pro } 0 \le y \le x \le 1, \\ e^{y^2} & \text{pro } 0 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

Množinu M si tedy rozdělíme na příslušné dvě části (trojúhelníky)

$$M_1: \quad 0 \le y \le x \le 1$$

$$M_2: \quad 0 \le x \le y \le 1$$

a pak máme

$$\iint_M e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\, dy = \iint_{M_1} e^{x^2}\, dx\, dy + \iint_{M_2} e^{y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx + \int_0^1 y e^{y^2}\, dy =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = e - 1\ .$$