1. cvičení z Matematické analýzy 2

2.-6. října 2017

1.1 Načrtněte a najděte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$,

(b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

(c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}$,

(d) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$,

(e) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,

(f) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$,

(g) $f(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(h) $f(x, y, z) = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

1.2 Určete funkci $f(t)$, jestliže pro funkci $z(x, y)$ platí $z(x, y) = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$ a $z(x, 1) = x$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ taková, že $x, y \geq 0$.

Řešení:
Máme $x = z(x, 1) = \sqrt{1} + f(\sqrt{x} - 1)$, tedy $f(\sqrt{x} - 1) = x - 1$ pro $x \geq 0$. Hodnoty $t = \sqrt{x} - 1$ jsou v intervalu $\langle -1, +\infty)$ a máme, že $x = (t + 1)^2$. Hledaná funkce tak je

$$f(t) = (t + 1)^2 - 1 = t^2 - 2t$$

pro $t \geq -1$.

Současně také máme, že

$$z(x, y) = \sqrt{y} + x - 1$$

pro $x, y \geq 0$.

1.3 Vyjádřete funkci $f(x, y)$, jestliže platí $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ taková, že $x \neq 0$.

Řešení:
Uvažujme zobrazení $\Phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (x + y, \frac{y}{x})$ a hledejme jeho obor hodnot a jeho možnou inverzi. Položme $a = x + y$ a $b = \frac{y}{x}$. Pak dostaneme, že $a = x + bx = (1 + b)x$, tedy $x = \frac{a}{b+1}$ a $y = \frac{ab}{b+1}$ pokud $b \neq -1$. Protože (z definice) musí být, $x \neq 0$, tak také musí být $a \neq 0$.

Podíváme se, co nastane, pokud je $b = -1$. Pak je $a = x + y$ a $x = -y$, tedy $a = 0$ (což je případ, který z podstaty zadání vylučujeme).

Podle omezení ze zadání tedy pro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ taková, že $a \neq 0$ a $b \neq -1$ dostáváme

$$f(a, b) = \left(\frac{a}{b+1}\right)^2 - \left(\frac{ab}{b+1}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{1 - b^2}{(b+1)^2} = a^2 \cdot \frac{1 - b}{1 + b} .$$

1.4 Sestrojte graf funkce $F(t)$, jestliže $F(t) = f(\cos t, \sin t)$, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } y \geq x \\ 0, & \text{je-li } y < x \ . \end{cases}$$

Řešení:
Ze zadání ihned máme

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \sin t \geq \cos t \\ 0, & \text{je-li } \sin t < \cos t \ . \end{cases}$$

To ale není příliš explicitní tvar. Takže ho ještě upravíme. Buď z grafického náhledu, nebo pomocí výpočtu:

$$\sin t \geq \cos t \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

dostáváme, že

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{pro } t \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \ . \end{cases}$$

Graf funkce F také snadno můžeme nahlédnout z toho, že zobrazení $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ pro $t \in \mathbb{R}$ je parametrizace kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Graf funkce f se pak skládá z poloroviny s okrajem ve výšce 1 a poloroviny bez okraje ve výšce 0. Přitom při procházení kružnice funkční hodnoty střídavě probíhají obě poloroviny.

1.5 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf této funkce a popište vrstevnice této funkce (vrstevnice na hladině $c \in \mathbb{R}$ je množina tvaru $\{(x,y) \in D_f \mid f(x,y) = c\}$):

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ (eliptický paraboloid),

(b) $f(x,y) = xy$ (hyperbolický paraboloid),

(c) $f(x,y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (dolní polovina sféry),

(d) $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu),

(e) $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 - y^2}$ (horní polovina jednodílného rotačního hyperboloidu).

Řešení:
Vrstevnice jsou
(a) soustředné elipsy,
(b), (e) hyperboly a jejich asymptoty,
(c), (d) soustředné kružnice.