10. cvičení z Matematické analýzy 2

4. - 8. prosince 2017

10.1 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(a) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx.$

(b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx.$

(c) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy.$

Řešení:

Fubiniho věta: Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce (tj. funkce, kterou má smysl vůbec integrovat, např. spojitá) a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_D |f|\ dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a D je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_D f\ dS$ a platí

$$\int\limits_{\pi_2(D)} \Big(\int\limits_{(\mathbb{R}\times\{y\})\cap D} f(x,y)\ dx \Big)\ dy = \iint\limits_D f\ dS = \int\limits_{\pi_1(D)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap D} f(x,y)\ dy \Big)\ dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

na $D = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dy \right)\ dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx \right)\ dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1}\ dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\ dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right|\ dx\,dy = \infty.$$

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$D: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x.$$

Máme
$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi \rangle$$
a
$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x \rangle.$$
Po výměně pořadí integrace máme
$$\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$$
a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \leq \sin x$ odvodíme:
$$\arcsin y \leq \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, takže
$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y$, tudíž
$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:
$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(b) Základní oblasti integrace jsou
$$D_1 : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$
$$D_2 : \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$
Množiny D_1 a D_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $D = D_1 \cup D_2$.

Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí
$$\iint_{D_1} f\ dS \ + \ \iint_{D_2} f\ dS = \iint_{D_1 \setminus D_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint_{D_1 \cap D_2} f\ dS \ + \ \iint_{D_2 \setminus D_1} f\ dS$$

Takže $\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle y, 2 - y \rangle$. Záměna integrace pak vyjde jako:
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(c) Základní oblast integrace je
$$D : \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}.$$
Po rozřezání oblasti D ve směru osy y máme
$$D : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^2 \leq y \leq 1.$$
Záměna integrace pak vyjde jako:
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\ dy\ dx.$$

10.2 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)
$$\iint_E e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\ dS,$$
kde oblast E je omezená přímkami $y=x$, $x=10y$ a $y=1$.

(b)
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\ dS,$$
kde E je oblast v prvním kvadrantu omezená křivkami $x=y^2$, $x=0$ a $y=1$.

(c)
$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\ dxdy$$
kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0),(1,0),(1,1)$.

Řešení:

(a) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy-y^2=y(x-y)\geq 0$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E:\quad 0\leq y\leq 1 \quad \& \quad y\leq x\leq 10y$$

$$\iint_E e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\ dS=\int_0^1\int_y^{10y} e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\ dx\ dy=\int_0^1\left[e^{y^3}\frac{2}{3}\cdot\frac{(xy-y^2)^{3/2}}{y}\right]_{x=y}^{x=10y} dy=$$
$$=\int_0^1 e^{y^3}\frac{2}{3}\cdot\frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\ dy=6\int_0^1 3y^2e^{y^3}\ dy=6\Big[e^{y^3}\Big]_{y=0}^{y=1}=6(e-1)\ .$$

(b) Oblast integrace
$$E:\quad 0\leq x\leq y^2 \quad \& \quad 0<y\leq 1$$
je omezená, ale u funkce $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0,0)$. Přesto ale můžeme použít Fubiniovu větu, protože funkce je nezáporná. Konkrétně:

Fubiniova věta (verze pro neomezené funkce nebo množiny): Nechť

- $E\subseteq\mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f:E\to\mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce a
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný a oba se rovnají (a funkce má dvojný integrál $\iint_E f\ dS$).

Máme tedy
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\ dS=\int_0^1\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\ dx\ dy=\int_0^1\Big[ye^{\frac{x}{y}}\Big]_{x=0}^{x=y^2} dy=\int_0^1 ye^y-y\ dy=\left[(y-1)e^y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{2}.$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $0 \le x \le y^2$ a $0 < y$, tak $0 \le \frac{x}{y} \le y$ a tedy

$$1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^y \to 1 \quad \text{pro} \quad (x,y) \to (0,0)$$

a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje a je konečný.

(c) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x\ .$$

Máme

$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\; dy\; dx = \int_0^1 \sin x\; dx = 1 - \cos(1).$$

10.3 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál:

(a)

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\; dy\; dx$$

(b)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\; dy\; dx$$

(c)

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\; dx\; dy$$

(d)

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\; dx\; dy$$

Řešení:

(a) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D: \quad 0 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 4 - x^2 \quad \& \quad y \ne 4.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině D sice není omezená, ale je nezáporná, takže Fubiniovu větu použít můžeme.

Proč funkce není omezená: Množina D je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku D, tedy vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

Poznámka: Připomeňme si ještě, jak je definován integrál $\iint_E f\ dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} |f|\ dS =: \iint_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Po záměně řezů dostaneme vztahy

$$D: \quad 0 \le y < 4 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{4-y}$$

takže dostáváme

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx \Big)\ dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4}\Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8-1}{4}.$$

(b) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D: \quad 0 \le x \le 8 \quad \& \quad \sqrt[3]{x} \le y \le 2,$$

takže

$$D: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\ dy\ dx = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\ dx \Big)\ dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4}\Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

(c) Zintegrujeme přímo:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\ dx\ dy = \int_0^1 \Big[3y^2e^{xy}\Big]_{x=0}^{x=y^2}\ dy = \int_0^1 3y^2e^{y^3} - 3y^2\ dy = \Big[e^{y^3} - y^3\Big]_{y=0}^{y=1} = e-2.$$

(d) Zintegrujeme přímo:

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\ dx\ dy = \int_1^{\ln 8} \Big[e^{x+y}\Big]_{x=0}^{x=\ln y}\ dy = \int_1^{\ln 8} (y-1)e^y\ dy = \Big[(y-2)e^y\Big]_{y=1}^{y=\ln 8} = 8\ln 8 - 16 + e.$$

10.4 (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx,$$

(b)

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\, dx,$$

(c)

$$\int\limits_{-2}^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx,$$

(d)

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dy\, dx,$$

(e)

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Řešení:

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, $f : U \to \mathbb{R}$ je integrabilní funkce a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je prosté na U° (tj. na vnitřku U) a spojitě diferencovatelné na nějaké otevřené množině obsahující U a
- množina $U \setminus U^\circ$ ($\subseteq \partial U$) má *nulovou míru* (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový; obvykle to jsou křivky, úsečky atd, které mají nulový obsah.)

Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f\, dS = \iint\limits_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\, d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

Vzhledem ke tvaru množiny i funkce zde budeme používat transformaci pomocí polárních souřadnic

$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

takže máme

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dS = \iint\limits_U r\cos\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int\limits_0^{\sqrt{2}} r\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x)g(y)\ dV = \Big(\int\limits_X f(x)\ dx\Big) \cdot \Big(\int\limits_Y g(y)\ dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x$$

což je trojúhelník, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ (po dosazení do nerovnosti pro E a úpravě, ale hlavně pomocí náčrtku) je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le r \le \tfrac{1}{\cos\varphi}\ .$$

takže máme

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{x}{x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_U \cos\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\varphi\ dr\ d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 1\ d\varphi = \frac{\pi}{4}\ .$$

(c) Oblast integrace je

$$E: \quad -2 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2\ .$$

takže máme

$$\int\limits_{-2}^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dS = \iint\limits_U r^2(\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=\cos 2\varphi})\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^2 r^2\ dr\right) \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{\pi} \cos 2\varphi\ d\varphi\right)}_{=0} = 0\ .$$

(d) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

což je čtvrtkruh o poloměru 1 v prvním kvadrantu a se středem v počátku, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \,.$$

takže máme

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dy\, dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dS = \iint\limits_U r \cdot \varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 r\, dr\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi\, d\varphi\right) = \frac{\pi}{8} \,.$$

(e) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \quad \& \quad y \le x \le \sqrt{4-y^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \,.$$

takže máme

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dS = \iint\limits_U \frac{r}{1+r^2}\, dr\, d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\varphi\right) = \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_{r=0}^{r=2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ln 5 \,.$$

10.5 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)

Načrtněte danou křivku a určete velikost plochy E, kterou křivka (zadaná pomocí polárních souřadnic) ohraničuje:

(a) $\varrho = 1 + \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

(b) $\varrho = |\varphi| + 1, \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Řešení:

(a) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy se nazývá *kardioida*. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} 1\ dS = \iint\limits_{U} r\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\sin\varphi} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=1+\sin\varphi}\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin\varphi)^2\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + 2\sin\varphi + 1)\ d\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

(b) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad -\pi \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + |\varphi|$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy má tvar srdce (ale není to *kardioida*!). Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} 1\ dS = \iint\limits_{U} r\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^{1+|\varphi|} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=1+|\varphi|}\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+|\varphi|)^2\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} (1+\varphi)^2\ d\varphi = \Big[\frac{(1+\varphi)^3}{3}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{1}{3}\pi^3 + \pi^2 + \pi.$$

10.6 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)
Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\ dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:
V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint\limits_{U} r \cdot r\, dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\, dr \Big)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\, d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Poznámka: Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\, d\varphi = 0$ pro $n \geq 0$.

10.7 (těžiště plošného útvaru)

Najděte hmotnost a polohu těžiště trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož hustota je rovna $\sigma(x,y) = x$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 4-3y.$$

Jednotlivé integrály tedy jsou

hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \sigma\, dS = \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x\, dx \Big)\, dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (3y-4)^2 - y^2\, dy = \frac{1}{2}\Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m}\iint\limits_E x\sigma(x,y)\, dS = \frac{3}{10}\int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x^2\, dx \Big)\, dy = \frac{1}{10}\int_0^1 \Big[x^3\Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^1 (4-3y)^3 - y^3\, dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40}\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E y\sigma(x,y)\, dS = \frac{3}{10}\int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} xy\, dx \Big)\, dy = \frac{3}{20}\int_0^1 \Big[x^2 y\Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{3}{20}\int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3\, dy = \frac{12}{5}\int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y\, dy = \frac{12}{5}\Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{5}.$$