

11. cvičení z Matematické analýzy 2

11. - 15. prosince 2017

11.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtete

(i)

$$\iiint_E xyz \, dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(ii)

$$\iiint_E y \, dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

(iii)

$$\iiint_E xy \, dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

Řešení:

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Necht' $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f \, dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \left(\int_{(\{x\} \times \{y\} \times \mathbb{R}) \cap E} f(x, y, z) \, dz \right) dS,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$ a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y . Případně:

$$\begin{aligned} \iiint_E f \, dV &= \int_{\pi_1(E)} \left(\int_{(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \pi_{1,2}(E)} \left(\int_{(\{x\} \times \{y\} \times \mathbb{R}) \cap E} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_{\pi_1(E)} \left(\iint_{(\{x\} \times \mathbb{R}^2) \cap E} f(x, y, z) \, dz \, dy \right) dx \end{aligned}$$

kde $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_1(x, y, z) = x$.

Průniky uvedené v integrálech nejsou nic jiného než jednorozměrné řezy příslušných množin, tj. "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup opakujeme (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.) Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_1(E)$).

(i) Oblast integrace je

$$E : 0 \leq z \leq xy, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \iiint_E xyz \, dV &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2} \, dy \, dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11} \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq z \leq x + 2y, \quad 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

I zde platí

$$\begin{aligned} \iiint_E y \, dV &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} \, dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \, dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}. \end{aligned}$$

(iii) Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \leq z \leq y - x, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \iiint_E xy \, dV &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y y^2x - x^2y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} \, dy = \\ &= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} \, dy = \left[\frac{y^5}{30} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

11.2 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a spočítejte integrály:

(i)

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx$$

(ii)

$$\int_0^\pi \int_{\ln(\sin y)}^0 \int_{-\infty}^z e^x \, dx \, dz \, dy.$$

Řešení:

(i) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 3 - 3x \quad \& \quad 0 \leq z \leq 3 - 3x - y$$

což je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ a $(0, 0, 3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem (který bychom asi uměli spočítat i jinak, ale my ho pro procvičení zintegrujeme). Máme tedy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3 - 3x - y) dy dx = \int_0^1 (3 - 3x)^2 - \frac{(3 - 3x)^2}{2} dx = \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq \pi \quad \& \quad \ln(\sin y) \leq z \leq 0 \quad \& \quad x \leq z.$$

Průmět $\pi_{2,3}(E)$ množiny E do roviny yz je tvaru

$$\pi_{2,3}(E): \quad 0 \leq y \leq \pi \quad \& \quad \ln(\sin y) \leq z \leq 0$$

což vypadá jako hranatě obrácené písmeno U s nekonečnými zužujícími se konci. Celkově pak E vypadá jako nekonečně dlouhý U -profil, který je šikmo seříznutý směrem dolů.

Oblast E je sice nekonečná, ale funkce v integrandu je opět nezáporná, takže můžeme použít Fubiniho větu:

$$\int_0^\pi \int_{\ln(\sin y)}^0 \int_{-\infty}^z e^x dx dz dy = \int_0^\pi \int_{\ln(\sin y)}^0 e^z dz dy = \int_0^\pi \left[e^z \right]_{z=\ln(\sin y)}^{z=0} dy = \int_0^\pi (1 - \sin y) dy = \pi - 2.$$

11.3 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(i)

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx.$$

(ii)

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dz dy dx.$$

(iii)

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz dz dx dy.$$

Řešení:

Cylindrické souřadnice jsou tvaru:

$$\Phi : \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Phi : \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{array}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r .$$

(i) Oblast integrace je

$$E : |x| \leq 2 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

neboli

$$E : x^2 \leq 4 \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

a tedy

$$E : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U : 0 \leq r \leq z \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2) dz dy dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2) dV = \\ & = \iiint_U r^2 \cdot r dV = \int_0^2 \int_0^z \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr dz = 2\pi \int_0^2 \int_0^z r^3 dr dz = \\ & = \frac{\pi}{2} \int_0^2 z^4 dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi. \end{aligned}$$

(ii) Oblast E je popsána jako

$$E : -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E : |x| \leq 1 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E : x^2+y^2 \leq 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako “čočka”). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2 + y^2 \leq 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dz dy dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dV = \\ & = \iiint_U r^3 \cdot r d\varphi dz dr = \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dz dr = 2\pi \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r^3 dz dr = \\ & = 4\pi \int_0^1 r^3(1-r^2) dr = 4\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

(ii) Oblast E je popsána jako

$$E: -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

neboli

$$E: 0 \leq y \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

a ekvivalentně

$$E: 0 \leq y \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

což je prostor ležící mezi o rotačním paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a kuželem $z^2 = x^2 + y^2$ a to celé ještě v poloprostoru určeném $y \geq 0$. Průmět oblasti E do roviny xy je skutečně polokruh (určený pomocí $y \geq 0$) o průměru 1:

$$x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

$$U: 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad r^2 \leq z \leq r.$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz dz dx dy = \iiint_{E=\Phi(U)} xyz dV = \\ & = \iiint_U r^2 z \cos \varphi \sin \varphi \cdot r d\varphi dz dr = \int_0^1 \int_{r^2}^r r^3 z \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right)}_{=0} dz dr = 0. \end{aligned}$$

11.4 (cylindrické souřadnice)

Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint_E x^2 dV,$$

kde

$$E: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \quad \& \quad x \leq 0.$$

Řešení:

Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu proto použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U: 0 \leq r \leq z \quad \& \quad 0 \leq z \leq 2 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \iiint_{E=\Phi(U)} x^2 dV &= \iiint_U r^3 \cos^2 \varphi dV = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 \int_0^z r^3 \cos^2 \varphi dr dz d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 z^4 \cos^2 \varphi dz d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^2 z^4 dz \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{8}{5} \pi. \end{aligned}$$

11.5 (sférické souřadnice)

Spočítejte

$$\iiint_E x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV$$

kde E je oblast mezi sférami se středy v počátku a poloměry 1 a 2.

Řešení:

Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: 1 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin \vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \iiint_{E=\Psi(U)} x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV &= \iiint_U r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \\ &= \left(\int_1^2 r^3 e^{r^4} dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right)}_0 \cdot \left(\int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) = 0. \end{aligned}$$

11.6 (sférické souřadnice)

Vypočítejte těžiště tělesa

$$E : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha_0) \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:

Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\Psi : \begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U : 0 \leq r \leq R \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{E=\Psi(U)} 1 dV = \iiint_U r^2 \sin \vartheta dV = \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = \\ &= 2\pi \int_0^R \int_0^{\alpha_0} r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr = 2\pi(1 - \cos \alpha_0) \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha_0). \end{aligned}$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z , budou x -ová i y -ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z -ovou souřadnici těžiště:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{m} \iiint_{E=\Psi(U)} z dV = \frac{1}{m} \iiint_U r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} d\varphi d\vartheta dr = \\ &= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m} (1 - \cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{1 - \cos \alpha_0} = \frac{3R}{8} (1 + \cos \alpha_0). \end{aligned}$$

11.7 (cylindrické souřadnice)

Určete těžiště homogenního kužele s výškou $h > 0$ a poloměrem podstavy $R > 0$.

Řešení:

Kužel

$$E : 0 \leq z \leq h \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{R}{h} \cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint_E 1 \, dV = \int_0^h \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{R}{h} \cdot z} 1 \, dx dy \right) dz = \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h} \cdot z \right)^2 dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z , budou x -ová i y -ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z -ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_E z \, dV = \frac{1}{m} \int_0^h \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{R}{h} \cdot z} z \, dx dy \right) dz = \frac{1}{m} \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h} \cdot z \right)^2 \cdot z \, dz = \frac{1}{m} \frac{\pi}{4} R^2 h^2 = \frac{3}{4} h .$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezu (přesněji na závislosti plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel" s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

11.8 (obecnější sférické souřadnice)

Vypočtete těžiště tělesa

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi : \begin{aligned} x/a &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y/b &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z/c &= r \cos \vartheta \end{aligned} ,$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace \mathcal{L} , která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \quad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin \vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F . Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E 1 \, dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \, dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| \, dV = \\ &= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 \, dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}. \end{aligned}$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \, dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr \cos \vartheta) \cdot (abc r^2 \sin \vartheta) \, dV = \\ &= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi \right) = \frac{3}{8}c. \end{aligned}$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.