12. cvičení z Matematické analýzy 2

18. - 22. prosince 2017

12.1 (délka křivky)
Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi: \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \le t \le 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:
Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\ dt \ \Big(= \int_\Gamma 1\ ds \Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t,\ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\ dt = \Big[{\scriptstyle 2u=t \atop 2du=dt} \Big] = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)}\ du =$$

$$= \Big\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \Big\} = 4\int_0^{\pi} \sin u\ du = 8\ .$$

12.2 (délka křivky)
Spočítejte délku části kuželové spirály Γ s $n \in \mathbb{N}$ závity definované parametrizací $\varphi : \langle 0, 2n\pi \rangle \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(t) = \Big(t\cos t,\ t\sin t,\ t \Big).$$

(Křivka leží v plášti kužele $x^2 + y^2 = z^2$.)

Řešení:
Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1\big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\big(\cos t - t\sin t\big)^2 + \big(\sin t + t\cos t\big)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_\Gamma 1\ ds = \int\limits_0^{2n\pi} \sqrt{2+t^2}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} t=\sqrt{2}u \\ dt=\sqrt{2}du \end{smallmatrix}\right] = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1+u^2}\ du = \left[\begin{smallmatrix} u=\sinh(x) \\ du=\cosh(x)dx \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= 2\int\limits_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} \cosh^2(u)\ du = \int\limits_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} 1+\cosh(2u)\ du = \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2}\right]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \Big[u+\sinh(u)\cosh(u)\Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \Big[u+\sinh(u)\sqrt{1+\sinh(u)^2}\Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1+2n^2\pi^2} = \ln\left(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1+2n^2\pi^2}\right) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1+2n^2\pi^2}.$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce $t=\sqrt{1+u^2}$ je částí hyperboly ($t^2-u^2=1$), je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\ .$$

Jde o rozklad funkce e^x na sudou a lichou funkci, tj. $e^x = \cosh(x)+\sinh(x)$. Podobně se pro parametrizaci kružnice $t=\sqrt{1-u^2}$ zase používají goniometrické funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1,$	$\sinh'(x)=\cosh(x)$
$\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=\cosh(2x),$	$\cosh'(x)=\sinh(x)$

Sečtením dostaneme

$$\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$$

a zderivováním tohoto vztahu pak

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x).$$

Inverzní funkce pro $u=\sinh(x)$ $\left(=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$ je

$$(x=)\ \operatorname{arcsinh}(u) = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right).$$

(Dostaneme ji z kvadratické rovnice $e^x-2u-\frac{1}{e^x}=0$ v proměnné e^x.)

12.3 (křivkový integrál z funkce)
Integrujte

(i) funkci $f(x,y)=\frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ podél křivky Γ: $y=\frac{x^2}{2}$ od bodu $A=(1,\frac{1}{2})$ do bodu $B=(0,0)$.

(ii) funkci $f(x,y)=x+y$ podél křivky Γ: $x^2+y^2=4$ v prvním kvadrantu od bodu $A=(2,0)$ do bodu $B=(0,2)$.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int\limits_\Gamma f\ ds = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\cdot||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky Γ, tj. zobrazení $\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \Gamma$.

(i) Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1-t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{ a } \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1+(t-1)^2}.$$

Takže

$$\int_\Gamma f\ ds = \int_0^1 \frac{1-t+\frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1+(1-t)^2}} \cdot \sqrt{1+(t-1)^2}\ dt = \int_0^1 1-t+\frac{(1-t)^4}{4}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=1-t \\ du=-dt \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= -\int_1^0 u + \frac{u^4}{4}\ du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

(ii) Jako parametrizaci si zvolíme např. polární souřadnice $\varphi(t) = \big(2\cos t, 2\sin t\big)$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \big(-2\sin t, 2\cos t\big) \quad \text{ a } \quad ||\varphi'(t)|| = 2.$$

Takže

$$\int_\Gamma f\ ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t + \sin t\ dt = 4\Big[\sin t - \cos t\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8.$$

12.4 (křivkový integrál z vektorového pole)

Najděte práci síly $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ vykonané na částici podél křivky Γ s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Její orientace je indukována touto parametrizací.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t^2+t^4, t^4+t, t+t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}\ dt = \int_0^1 3t^2 + 5t^4 + 6t^5\ dt = \Big[t^3+t^5+t^6\Big]_0^1 = 3.$$

12.5 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_\Gamma y\ dx - x\ dy$$

kde Γ je asteroida určená parametrizací

$$\varphi: \quad x = a\cos^3 t \ \ \& \ \ y = a\sin^3 t \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

Řešení:
Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(y,\ -x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} (a\sin^3 t, -a\cos^3 t)\cdot\begin{pmatrix} -3a\cos^2 t\cdot\sin t \\ 3a\sin^2 t\cdot\cos t\end{pmatrix}\ dt =$$

$$= -3a^2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t\ (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = -\frac{3}{4}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = -\frac{3}{4}\pi a^2.$$

12.6 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_\Gamma (2a - y)\ dx + x\ dy$$

pro oblouk cykloidy Γ dané parametrizací

$$\varphi: \quad x = a(t - \sin t) \ \ \& \ \ y = a(1 - \cos t) \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a, která se valí bez tření po přímce.).

Řešení:
Máme

$$\varphi'(t) = \Big(a(1-\cos t),\ a\sin t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(2a - y,\ x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \Big(a(1+\cos t),\ a(t-\sin t)\Big)\cdot\begin{pmatrix} a(1-\cos t) \\ a\sin t\end{pmatrix}\ dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t \; dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t \; dt = a^2 \Big[- t \cos t \Big]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t \; dt = -2\pi a^2.$$

12.7 (konzervativní pole, potenciál)

Dokažte, že následující pole jsou konzervativní a najděte jejich potenciál.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y, \quad y^2 + x, \quad ze^z)$,

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \Big(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, \quad -\frac{1}{x+z}, \quad \frac{y}{(x+z)^2}\Big)$.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = \big(\frac{1}{z}, \quad -\frac{3}{z}, \quad \frac{3y-x}{z^2}\big)$.

Řešení:

Práce síly $\vec{F}$ v *oblasti* U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "osa x'' nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1 \; d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{na} \quad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \mathrm{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{na} \quad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

(i) Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0 - 0, \quad 0 - 0, \quad 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 + y && (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^2 + x && (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= ze^z \ . && (3) \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y) \ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2 \ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z \ dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

(ii) Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}, \ \ \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3}, \ \ \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}\right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} && (4) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{x+z} && (5) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{y}{(x+z)^2} \ . && (6) \end{aligned}$$

Začneme třeba druhou rovnici:

$$f(x,y,z) = \int -\frac{1}{x+z}\ dy = -\frac{y}{x+z} + C(x,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{x+z} + C(x,z)\right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x,z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x+z} + D(x)\right) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2\ dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

(iii) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.
Pro potenciál f musí platit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{z} \qquad (7)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{3}{z} \qquad (8)\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{3y-x}{z^2}\ . \qquad (9) \end{aligned}$$

Začneme třeba první rovnici:

$$f(x,y,z) = \int \frac{1}{z}\ dx = \frac{x}{z} + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z} + C(y,z)\right) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int -\frac{3}{z}\ dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = \frac{x-3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y - x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x - 3y}{z} + D(z)\right) = -\frac{x - 3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x - 3y}{z} + K.$$