13. cvičení z Matematické analýzy 2

1. - 5. ledna 2018

13.1 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)

$$\iint\limits_M z\ dS,$$

kde M je částí válce $x^2+y^2=1$ mezi rovinami $z=0$ a $z=x+1$.

(ii)

$$\iint\limits_M yz\ dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x=uv$, $y=u+v$, $z=u-v$ a $u^2+v^2\le 1$.

(iii)

$$\iint\limits_M x^2z+y^2z\ dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

Řešení:
Integrál z funkce $f: M\to\mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint\limits_M f\ dS=\iint\limits_U f(\Phi(u,v))\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|\ dS\ ,$$

kde $\Phi: U\to M$ je vhodná parametrizace.

(i) Plocha je určena jako

$$M:\quad x^2+y^2=1\quad\&\quad 0\le z\le x+1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi,z)=(\cos\varphi,\sin\varphi,z)$$

s definičním oborem

$$U:\quad 0\le\varphi\le 2\pi\quad\&\quad 0\le z\le 1+\cos\varphi.$$

Máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=(0,0,1)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial z}=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)\qquad\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\|=1.$$

Takže pro funkci $f(x,y,z) = z$ máme

$$\iint_M f\ dS = \iint_U z\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} z\ dz\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2}\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2}\right)\ d\varphi =$$

$$= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

(ii) Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U: \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (uv, u+v, u-v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u + v$ a $z = u - v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} = (-2, v+u, v-u) \qquad \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = \sqrt{2(u^2+v^2)+4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint_M yz\ dS = \iint_U (u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\ dS = \left[\begin{smallmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ (r,\varphi)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2+4}\ dr\ d\varphi = \left(\int_0^3 r^3\sqrt{2r^2+4}\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\ d\varphi\right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u + v$ a $z = u - v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2-z^2}{4}$ a $1 \geq u^2 + v^2 = \frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \quad y^2 + z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

(iii) Plochu $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\ \&\ z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, 2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\sin\vartheta\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (2\cos\vartheta\cos\varphi, 2\cos\vartheta\sin\varphi, -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \; dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \Big[8\sin^4\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

13.2 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientaci danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:
Tok vektorového pole $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dS \; ,$$

kde $\Phi : U \to S$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\; y,\; 1 - x^2 - y^2\Big)$$

s definičním oborem

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -2x\big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(2y, 2x, 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint_U (y, x, 1 - x^2 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint_U (1 + x^2 + y^2)\ dS = \left[\begin{smallmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{smallmatrix}\right] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)r\ dr d\varphi = \left(\int_0^1 (1+r^2)r\ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(1+r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{15}{2}\pi.$$