14. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. ledna 2018

14.1 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y) = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky Γ, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka Γ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Podle Greenovy věty pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\Gamma = \partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

14.2 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

(i)

$$\int\limits_{\Gamma} y^2 \, dx + 3xy \, dy$$

kde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ je hranice mezikruží určeného záporně orientovanou kružnicí Γ_1 s poloměrem 2 a středem v počátku a kladně orientovanou kružnicí Γ_2 s poloměrem 1 a středem také v počátku.

(ii)

$$\int\limits_{\Gamma} x^4 \, dx + xy \, dy$$

kde Γ je kladně orientovaná hranice trojúhelníku s vrcholy $A = (0,1)$, $O = (0,0)$, $B = (1,0)$.

Řešení:
(i) Orientace hranice mezikruží odpovídá orientaci pro Greenovu větu (správná orientace znamená, že při postupu podél hranice máme oblast po levé straně). Naše oblast je tvaru

$$M: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 2^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(y^2,\ 3xy\right) .$$

Můžeme proto psát

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} 3y - 2y \; dS = \iint\limits_{M} y \; dS = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 1\le r\le 2 \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^2 r^2 \cos\varphi \; dr \; d\varphi = \left(\int\limits_1^2 r^2 \; dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \; d\varphi \right) = 0 .$$

(ii) Trojúhelník M popíšeme jako

$$M: \quad 0 \le y \le 1 \;\; \& \;\; 0 \le x \le 1 - y$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(x^4,\ xy\right) .$$

Orientace křivky Γ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} y \; dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y} y \; dx \; dy = \int\limits_0^1 y(1-y) \; dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} .$$

14.3 (Stokesova věta)
Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a Γ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora.

Řešení:
Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

Plocha M je trojúhelník. Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v kladném smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3, 1, 1) \ .$$

Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x - 3y,\ 2y\big) \ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3 - 3x - y$, tedy

$$\Phi(x, y) = (x, y, 3 - 3x - y)$$

pomocí množiny

$$U : \quad 0 \le x \le 1 \ \ \& \ \ 0 \le y \le 3 - 3x \ .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -3\big) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -1\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(3, 1, 1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{M = \Phi(U)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_U \Big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\Big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dS =$$

$$= \iint_U (3x,\ x - 3y,\ 2y) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint_U (-10x + y)\ dS = \int_0^1 \int_0^{3(1-x)} y - 10x\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{9}{2}(1 - x)^2 - 30x(1 - x)\ dx = \frac{3}{2} - 30 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{7}{2} \ .$$

14.4 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, x, e^{xy} \cos z)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $z \ge 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\;\&\;\; z \geq 0$$

a

$$\partial M: \;\; x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad z = 0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru"a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \; d\alpha = \pi.$$

14.5 (Stokesova věta)

Určete

$$\int_\Gamma (y - z)\; dx + (z - x)\; dy + (x - y)\; dz$$

kde

$$\Gamma: \; x^2 + y^2 = 1 \;\;\&\;\; x + z = 1$$

je kladně orientovaná křivka při pohledu seshora.

Řešení:
Křivka Γ je elipsa, která vznikne jako průnik roviny $x + z = 1$, která šikmo přeřízne povrch válce $x^2 + y^2 = 1$. Můžeme ji chápat jako hranici plochy

$$S: \quad x^2 + y^2 \leq 1 \;\;\&\;\; x + z = 1$$

s orientací nahoru. Použijeme proto Stokesovu větu. Spočítáme si rotaci

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \big(-2,\; -2,\; -2\big)\;.$$

Normované normálové vektorové pole orientované plochy M je určené normálovým vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$ (směr vektoru také odpovídá zadání). Můžeme pak psát

$$\int_{\Gamma = \partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_M \big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\big)\; dS = -2\sqrt{2} \iint_M 1 \; dS\;.$$

Teď už stačí jen určit velikost povrchu plochy M (tj. $\iint_M 1 \; dS$). Protože ale jde o plochu ohraničenou elipsou s délkami poloos $a = 1$ a $b = \sqrt{2}$ (snadno určíme z obrázku), je obsah roven $\pi ab = \sqrt{2}\pi$.

Dosazením pak dostáváme

$$\int_{\Gamma = \partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \cdots = -2\sqrt{2} \iint_M 1 \; dS = -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\pi = -4\pi\;.$$

14.6 (Gaussova věta)

Určete

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde S je hranice čtyřstěnu

$$M: \quad x + y + z \leq 1 \;\; \& \;\; x, y, z \geq 0$$

orientovaná vnější normálou a vektorové pole je

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(xy, yz, xz\big) \ .$$

Řešení:
Použijeme Gaussovu větu. Orientace plochy S je v souladu s Gaussovou větou. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x \ .$$

Čtyřstěn M si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1 - x \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

Máme tedy

$$\iint\limits_{S=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F}) \; dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} x + y + z \; dz \; dy \; dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left[(x + y) + \frac{1}{2}(1 - x - y)\right] (1 - x - y) \; dy \; dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} 1 - (x + y)^2 \; dy \; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left[y - \frac{(x + y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \; dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}$$

14.7 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a sférou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ s vnější orientací.

Řešení:
Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

a

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ .$$

Orientace okraje ∂M je dána vnější normálou.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

a Gaussova věta nám dává

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{M} 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\ dV = \left[\begin{smallmatrix} x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} 3r^2 \cdot |r^2\sin\vartheta|\ dr\ d\varphi\ d\vartheta = \left(\int\limits_0^1 3r^4\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta\ d\vartheta\right) = \frac{3}{5}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$