2. cvičení z Matematické analýzy 2

9. - 13. října 2017

Pojem *otevřená* množina intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv"). Přesněji:

Otevřená množina G je taková, že s každým bodem $x_0 \in G$ obsahuje i nějaké jeho okolí $U_\varepsilon(x_0)$ v podobě tzv. otevřené koule s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě x_0:

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < \varepsilon\}.$$

tj.

$$G \text{ je } \textit{otevřená} \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (\forall x_0 \in G)\ (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$$

Pojmem uzavřené množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko. Přesněji:

Uzavřená množina F je taková, že každý bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jehož libovolné okolí $U_\varepsilon(x_0)$ má s množinou F průnik, už musí ležet v F:

$$F \text{ je } \textit{uzavřená} \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \big(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n\big)\ \big((\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x_0) \cap F \neq \emptyset\ \big) \Rightarrow x_0 \in F$$

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové v tom smyslu:

$$G \text{ je otevřená} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R}^n \setminus G \text{ je uzavřená}$$

$$F \text{ je uzavřená} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R}^n \setminus F \text{ je otevřená}$$

Připomeňme si ještě, že

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů, které jsou v A i s nějakým okolím (neboli vnitřek je největší otevřená množina obsažená v A)

$$x \in A^\circ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \subseteq A$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu všech bodů, ke kterým se můžeme přiblížit libovolně blízko z množiny A.

$$x \in \overline{A} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$

$$x \in \partial A \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

Pro libovolnou množinu A se tak celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží (značeno pomocí "$\cup\!\!\!\cdot$") na vnitřek A°, hranici ∂A a vnějšek $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = A^\circ\ \dot\cup\ \partial A\ \dot\cup\ (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

Kromě toho ještě platí:

- $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$

- Uzávěr $\overline{A}$ je uzavřená množina a sice nejmenší uzavřená, která obsahuje množinu A.
- Vnitřek A° je otevřená množina a sice největší otevřená, která je obsažená v množině A.
- A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$
- A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

2.1 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr následujících množin:

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 \leq 3 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

(c) $M = \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Tento příklad je určený hlavně pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů. Následující podrobné zdůvodnění slouží hlavně jako ukázka toho, co všechno se musí ve skutečnosti ověřovat.

Poznámka č. 1: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:
Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak

- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ je otevřená

  (protože je *vzorem* otevřeného intervalu $(0, +\infty)$) a
- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená

  (protože je *vzorem* uzavřeného intervalu $\langle 0, +\infty)$).

Poznámka č. 2: Později se dozvíme tzv. *větu o implicitní funkci.* Z té pak bude plynout toto tvrzení:
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Pokud pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, je $f'(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \neq (0, \dots, 0)$, pak

- pro $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ je
$$\overline{A} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$$
- a pro $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$ je
$$B^\circ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) > 0\}.$$

(a) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost vyjádřit jako množinu
$$A : \ (x+1)^2 + y^2 \leq 4$$
což je kruh i s okrajem o poloměru 2 a středem $a_0 = (-1, 0)$. Podobně druhá nerovnost znamená množinu
$$B : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ .$$
Množinu M můžeme vyjádřit jako
$$M = A \cap B \ .$$

- ***Uzávěr*** M: Z pomocné věty víme, že obě množiny A i B jsou uzavřené. Množina M je jejich průnikem, tedy je také uzavřená a proto je uzávěrem sama sebe (neboli $\overline{M} = M$).

- ***Vnitřek*** M: Použijeme vztah $M^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (viz příklad **2.4**). Z poznámky č. 2 máme, že:

$$A^\circ : \ (x+1)^2 + y^2 < 4$$
$$B^\circ : \ (x-2)^2 + y^2 < 4 \ .$$

  Označme si pro větší přehlednost

$$V_1(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - 4 \qquad \text{a} \qquad V_2(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 4 \ .$$

  Dostáváme tak

$$M^\circ : \ V_1(x,y) < 0 \ \wedge \ V_2(x,y) < 0.$$

- ***Hranice*** M:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ : \Big(V_1(x,y) \le 0 \ \wedge \ V_2(x,y) \le 0\Big) \wedge \Big(V_1(x,y) \ge 0 \ \vee \ V_2(x,y) \ge 0\Big)$$

  neboli

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ : \Big(V_1(x,y) = 0 \ \wedge \ V_2(x,y) \le 0\Big) \vee \Big(V_2(x,y) = 0 \ \wedge \ V_1(x,y) \le 0\Big)$$

  Hranice jsou dva oblouky kružnice.

- ***Vnějšek*** M: Je dán jako vnitřek doplňku množiny M, tedy $(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ$, neboli je to doplněk uzávěru množiny M:

$$(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M} : \ V_1(x,y) > 0 \ \vee \ V_2(x,y) > 0 \ .$$

Můžeme si všimnout, že vnitřek jsme v tomto případě získali tak, že jsme z neostrých nerovnosti udělali ostré.

POZOR! Tímhle způsobem ale obecně nemusíme získat pokaždé vnitřek M°, ale jen nějakou jeho (obecně menší) otevřenou podmnožinu $N \subseteq M^\circ$. Rovnost nemusí obecně nastat. Jednoduchým příkladem je

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \ge 0\}$$

kde zřejmě máme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \subsetneq \quad \mathbb{R} = A^\circ.$$

V našem případě opravdu pro $V_1(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - 4$ máme $V_1'(x,y) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) = \Big(2x+2, 2y\Big)$. Pokud by náhodou nastalo, že $V_1'(x,y) = (0,0)$, pak je $x = -1$ a $y = 0$ a tudíž $V_1(-1,0) = -4 \neq 0$. Podmínku z poznámky č. 2 tak máme splněnou a proto opravdu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 4\}$ je vnitřek množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \le 4\}$.

(b) Zadání si opět upravíme na přehlednější tvar doplněním na čtverec:

$$A : \ (x-1)^2 - y^2 > 1$$
$$B : \ (x-2)^2 + y^2 \le 4$$
$$M = A \cap B$$

což je průnik dvou otevřených oblastí vymezených hyperbolou (množina A) a kruhu (i s okrajem) o poloměru 2 (množina B). Opět si pro větší přehlednost označíme

$$V_1(x,y) = (x-1)^2 - y^2 - 1 \qquad \text{a} \qquad V_2(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 4 \ .$$

- ***Vnitřek*** M: Opět použijeme vztah $M^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ a máme, že

$$A^\circ = A: \ V_1(x,y) > 0$$

$$B^\circ: \ V_2(x,y) < 0 \ .$$

  Dostáváme tak

$$M^\circ: \ V_1(x,y) > 0 \ \wedge \ V_2(x,y) < 0.$$

- ***Uzávěr*** M: Tentokrát to nebude tak přímočaré, protože obecně platí pouze, že

$$\overline{M} = \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \ .$$

  Naštěstí ale také platí omezení, a sice

$$\overline{A} \cap \overline{B} \setminus \overline{A \cap B} \subseteq \partial A \cap \partial B \ .$$

  Přitom víme, že množina

$$\partial A \cap \partial B: \quad (x-1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 = 4$$

  je průnik hyperboly a kružnice, což je konečná množina (zde dvouprvková množina). Ovšem pokud se množina $\overline{A} \cap \overline{B}$ liší od uzavřené množiny $\overline{A \cap B}$ jen v konečném počtu bodů, pak tyto body musí být izolované body množiny $\overline{A} \cap \overline{B}$. Množina $\overline{A} \cap \overline{B}$ ale žádné izolované body nemá. Tudíž jsme ukázali, že

$$\overline{M} = \overline{A} \cap \overline{B}: \ V_1(x,y) \geq 0 \ \wedge \ V_2(x,y) \leq 0 \ .$$

- ***Hranice*** M:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ: \Big(V_1(x,y) \geq 0 \ \wedge \ V_2(x,y) \leq 0\Big) \wedge \Big(V_1(x,y) \leq 0 \ \vee \ V_2(x,y) \geq 0\Big)$$

  neboli

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ: \Big(V_1(x,y) = 0 \ \wedge \ V_2(x,y) \leq 0\Big) \vee \Big(V_2(x,y) = 0 \ \wedge \ V_1(x,y) \geq 0\Big)$$

  Hranice je tedy jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly.

- ***Vnějšek*** M: Je dán jako vnitřek doplňku množiny M, tedy $(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ$, neboli je to doplněk uzávěru množiny M:

$$(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}: \ V_1(x,y) > 0 \ \vee \ V_2(x,y) < 0 \ .$$

(c) Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak $||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| \leq \sqrt{2} \cdot \varepsilon$. Speciálně tedy v libovolném okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \ \text{ a } \ \partial \mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2.$$

2.2 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr definičních oborů následujících funkcí. Množiny načrtněte.

(a) $f(x,y) = \ln\left(x \ln(y - x)\right)$;

(b) $f(x,y) = \arcsin(4 - x^2 - y^2) + \arcsin(2xy)$;

(c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

Řešení:
Příklad je určený opět pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtu.

(a) $D(f): \; (x > 0 \;\wedge\; y - x > 1) \;\vee\; (x < 0 \;\wedge\; 0 < y - x < 1)$

(b) $D(f): \; 3 \le x^2 + y^2 \le 5 \;\wedge\; -\frac{1}{2} \le xy \le \frac{1}{2}$

(c) $D(f): \; (x^2 + 2x + y^2 \ge 0 \;\wedge\; x^2 - 2x + y^2 > 0) \;\vee\; (x^2 + 2x + y^2 \le 0 \;\wedge\; x^2 - 2x + y^2 < 0)$

2.3 Najděte příklad spojité funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kdy pro

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \ge 0\}$$

je

$$\overline{A} \subsetneqq B \quad \text{a} \quad B^\circ \supsetneqq A$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Řešení:
Např. můžeme zvolit funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ -(x+1)^2, & x < -1 \; . \end{cases}$$

Pak je $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ a $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge -1\}$. Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x,y,c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

Můžeme si ještě všimnout, že zde máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ 0, & x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ -2(x+1), & x < -1 \; . \end{cases}$$

a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ a vidíme, že pokud je $x \in \langle -1, 0 \rangle$, pak $f'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \Big(0, 0\Big)$. Poznámku č.2 z řešení prvního příkladu tedy opravdu nemůžeme použít.

2.4 Ukažte, že pro každé dvě množiny A, B v $\mathbb{R}^n$ platí:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Poznámka: Otevřené množiny si více "rozumí" se sjednocením (tj. $\cup$), protože sjednocení *libovolně* velkého systému otevřených množin je opět otevřená množina a naopak průnik (obecně) pouze *konečně* mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Při operaci *vnitřku* ($A \mapsto A^\circ$) to ale zase na druhou stranu lépe funguje pro průnik (tj. $\cap$), viz bod (a) (tj. nastává tu rovnost obou stran na rozdíl od analogické situace pro sjednocení - viz příklad **2.5**).

Podobně, uzavřené množiny si více "rozumí" s průnikem (tj. $\cap$), protože průnik *libovolně* velkého systému uzavřených množin je zase uzavřená množina a naopak sjednocení (obecně) pouze *konečně* mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

Při operaci *uzávěru* ($A \mapsto \overline{A}$) to ale zase na druhou stranu lépe funguje pro sjednocení (tj. $\cup$), viz bod (b) (tj. nastává tu rovnost obou stran na rozdíl od analogické situace pro průnik - viz příklad **2.5**).

Řešení:

(a) $x \in (A \cap B)^\circ \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A \wedge U_\varepsilon(x) \subseteq B \;\Leftrightarrow\; x \in A^\circ \cap B^\circ$.

Pozor! Poslední implikace

$$(\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A \;\wedge\; U_\varepsilon(x) \subseteq B \;\Leftarrow\; x \in A^\circ \cap B^\circ$$

platí, protože zvolíme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ pro $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ a $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$.

(b)

$$x \in \overline{A \cup B} \;\Leftrightarrow\; (\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \;\vee\; U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A} \cup \overline{B}\ .$$

Pozor! Poslední implikace

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \;\vee\; U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \;\Rightarrow\; x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

platí, protože stačí sledovat jen nějakou posloupnost $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ jdoucí k nule např. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

2.5 Najděte příklady množin A, B v $\mathbb{R}^k$, pro které platí:

(a) $(A \cup B)^\circ \supsetneqq A^\circ \cup B^\circ$

(b) $\overline{A \cap B} \subsetneqq \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení:
Potřebujeme, aby množiny byly k sobě "přilepené". Takže v $\mathbb{R}$ např. $A = (0, 1\rangle$ a $B = (1, 2)$ a ve vyšších dimenzích to stačí jen kartézsky přenásobit třeba nějakým intervalem.

2.6 Určete izolované a hromadné body množiny $M = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Řešení:
Označme si pro jednoduchost $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Takže máme, že $M = A^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. (Zápis A^2 znamená $A \times A$.)

Všechny body množiny M jsou izolované. To můžeme ukázat buď přímo tím, že najdeme pro každý z bodů vhodné okolí, které ho odděluje od ostatních bodů množiny M anebo využijeme následujícího:

- každý bod množiny A je izolovaný (v rámci $\mathbb{R}$)
- kartézský součin množin, kde každý bod je izolovaný, dává opět množinu bodů, kde každý bod je izolovaný (tj. A^2 se skládá jen z izolovaných bodů).

Hromadný bod $a \in \mathbb{R}^2$ množiny M je takový, že

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

neboli k bodu a konverguje nějaká posloupnost $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M \setminus \{a\}$, tj.:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)\ \|a_k - a\| < \varepsilon\ .$$

Hromadné body jsou tak určitě body $(0,0)$ a body $(0, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, 0)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro ty stačí uvažovat posloupnosti:

$$\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{k}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left(\tfrac{1}{n}, 0\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{n}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left(0, \tfrac{1}{n}\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$$

A nakonec ukážeme, že jiné hromadné body už nejsou. Všechny dosud uvažované body (tj. izolované a nalezené hromadné) dohromady tvoří množinu $(\{0\} \cup A)^2$. Všimněme si, že množina $\{0\} \cup A$ je uzavřená (v $\mathbb{R}$), protože její doplněk je otevřený. Množina $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup A)$ se totiž skládá z otevřených intervalů $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ a $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ pro $n \in \mathbb{N}$.

A nyní, podobně jako výše, máme, že kartézský součin uzavřených množin je opět uzavřená množina. Speciálně, $(\{0\} \cup A)^2$ je uzavřená množina a jiné hromadné body množiny M tudíž už nejsou, protože každý bod v doplňku množiny $(\{0\} \cup A)^2$ je tam i nějakým svým okolím.

Vlastně jsme tak i ukázali, že

$$\overline{M} = (\{0\} \cup A)^2$$

protože $(\{0\} \cup A)^2$ je zřejmě nejmenší uzavřená množina obsahující M.

2.7 Sestrojte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(a) nemá žádný vnitřní bod,

(b) nemá žádný hraniční bod,

(c) nemá žádný vnější bod,

(d) nemá žádný hromadný bod,

(e) nemá žádný izolovaný bod.

Řešení:

(a) jakákoliv spočetná množina (např. $\mathbb{Q}^2$), kružnice, přímka (a mnoho dalších příkladů).

(b) Z požadavku $\partial M = \emptyset$ plyne, že $M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M} = \partial M \cup M^\circ = M^\circ$, tedy $M^\circ = M = \overline{M}$ a množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Jediná taková neprázdná množina je pouze $M = \mathbb{R}^2$ (což není vůbec triviální tvrzení).

(c) Vnějšek množiny je roven $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$, tedy potřebujeme, aby $\overline{M} = \mathbb{R}^2$ (množina je tzv. *hustá*). Můžeme opět volit např. $M = \mathbb{Q}^2$.

(d) jakákoliv konečná množina; $\mathbb{N}^2$ (a mnoho dalších příkladů).

(e) jakákoliv otevřená množina (a mnoho dalších příkladů).