3. cvičení z Matematické analýzy 2

16. - 20. října 2017

3.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$,

Řešení:
(a) neexist.; (b) 0; (c) 0; (d) neexist.; (e) $\frac{1}{2}$.

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu (někde je výhodné použít polární souřadnice):

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$,

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$,

(e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$,

Řešení:
(a) neexist. ; (b) 4 ; (c) 0 ; (d) neexist. ; (e) neexist. ; (f) neexist.

3.3 Vyšetřete existenci limity

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y} .$$

Znázorněte definiční obor uvedené funkce.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y}$ je

$$D(f): \quad y \neq -|x-1|$$

což znamená, že z roviny musíme vyjmout graf funkce ve tvaru absolutní hodnoty. Bod $(1,0)$ je evidentně hromadným bodem $D(f)$. V limitě se čitatel i jmenovatel blíží k nule. Můžeme zkusit přiblížení po přímkách procházejících tímto bodem tj. přímky tvaru $y = k(x-1)$, kde $k \in \mathbb{R}$ (a přímka $x = 1$). Zjistíme, že všechny dávají limitu 0.

Přesto ale (konečná) limita *neexistuje*. K tomu si stačí uvědomit toto: Na množině

$$M: \quad y = -|x-1|$$

se jmenovatel (tj. funkce $g(x,y) = |x-1|+y$) vynuluje (proto ji také musíme vyjmout z $D(f)$) ale čitatel (tj. funkce $h(x,y) = 4(x-1)^2 + 3y^2$) je na této množině roven nule právě jen v bodě $a_0 = (1,0)$.

V každém okolí $U_\varepsilon(a_0)$ bodu a_0 si vezmeme bod $a_1 \in M$, který bude "dost blízko" (např. aby $\|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2$). (Na chvíli připusťme, že limita může být i plus/minus nekonečno.) Máme pak tudíž

$$\lim_{(x,y)\to a_1} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to a_1} \frac{|h(x,y)|}{|g(x,y)|} = \infty$$

a to právě kvůli tomu, že $h(a_1) \neq 0$, zatímco $g(a_1) = 0$!

V okolí $U_{\varepsilon/2}(a_1)$ tedy musí existovat bod $a_2 \in D(f)$ v němž je hodnota $|f(a_2)|$ dostatečně vysoká (větší než libovolná pevně zvolená mez K, tedy $|f(a_2)| \geq K$). Bod a_2 se ale evidentně nachází i v $U_\varepsilon(a_0)$, protože

$$\|a_2 - a_0\| \leq \|a_2 - a_1\| + \|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

V okolí $U_\varepsilon(a_0)$ (voleném libovolně) tak máme bod, kde je hodnota funkce $f(x,y)$ příliš velká (v absolutní hodnotě). Tudíž funkce $f(x,y)$ nemůže mít v a_0 konečnou limitu (a jiné limity z definice ani neuvažujeme - jen v rámci důkazu jsme je na chvíli z technických důvodů připustili).

Původní limita tedy neexistuje.

Tento způsob zdůvodnění *neexistence* limity se dá použít i v mnoha jiných případech - stačí mít jen nějakou **křivku ve jmenovateli, která se na něm vynuluje, zatímco v čitateli se nikde nevynuluje (kromě bodu, kam se blížíme)**.