5. cvičení z Matematické analýzy 2

30. října - 3. listopadu 2017

5.1 (linearizace funkce)

(a) Pro funkci $f(x,y) = xe^{xy}$ nalezněte její linearizaci v bodě $a_0 = (6,0)$. Použijte ji k přibližnému určení hodnoty funkce f v bodě $(5.9, 0.01)$.

(b) Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^3}}} .$$

Řešení:

(a) Pro $a = (x,y)$ je linearizace funkce f v bode a_0 tvaru

$$g(a) = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = 6 + (x-6) + 36(y-0) = x + 36y$$

Přibližná hodnota funkce f v bode $(5.9, 0.01)$ tak je $f(5.9, 0.01) \doteq g(5.9, 0.01) = 6.26$. (Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst je $f(5.9, 0.01) \doteq 6.25857$.)

(b) Pro jednoduchost budeme uvažovat funkci s definičním oborem $x, y, z > 0$ a předpisem

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{z^3}}} = x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{4}}$$

a najdeme její linearizaci v bodě $a_0 = (1,1,1)$. Pak je

$$f'(x,y,z) = \left(2xy^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\frac{1}{3}x^2y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\frac{1}{4}x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{5}{4}}\right)$$

$$f'(1,1,1) = \left(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$$

a linearizace tak pro $a = a_0 + \vec{h}$, kde $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ je

$$g(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + \left(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 1 + 2h_1 - \frac{1}{3}h_2 - \frac{1}{4}h_3 .$$

Pro $a_1 = (1.03, 0.98, 1.05)$ tj. $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.03, -0.02, 0.05)$ tak máme přibližnou hodnotu funkce f jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = 1 - 0.06 + \frac{0.02}{3} - \frac{0.05}{4} = 0.9341666\ldots$$

5.2 (tečné roviny)

Předpokládejme, že výška terénu v $\mathbb{R}^3$ je popsána grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2+1}$. V bodě $A = (2, 1, ?)$ upustíme míč. Určete směr (při pohledu shora, tj. v $\mathbb{R}^2$, i v prostoru, tj. v $\mathbb{R}^3$), kterým se bude kutálet.

Dále určete, zda je strmější tečná rovina v bodě A nebo v bodě $B = (0, 1, ?)$ (tj. porovnejte úhly, které tyto roviny svírají se základnou $z = 0$).

Řešení:
Míč se bude kutálet ve směru největšího spádu funkce, tj. proti směru gradientu

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(-\frac{2x}{(x^2+2y^2+1)^2}, -\frac{4y}{(x^2+2y^2+1)^2} \right)_{|a=(2,1)} = \left(-\frac{4}{49}, -\frac{4}{49} \right)$$

tedy ve směru určenému vektorem $\vec{v} = (1,1)$ (pro jednoduchost jsme ho nenormovali). V prostoru to pak bude směr určený vektorem $\vec{V} = (\vec{v}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}) = \left(1, 1, -\frac{8}{49}\right)$.

Úhel α, který svírá tečná rovina v bodě $A = \left(2, 1, \frac{1}{7}\right)$ se základnou $z = 0$, je určen jako $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(a)$, kde $\vec{v_1} = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$. Neboli $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(a) = \operatorname{grad} f(a)[\vec{v_1}] = \|\operatorname{grad} f(a)\| = \frac{4\sqrt{2}}{49}$.

Podobně, úhel β, který svírá tečná rovina v bodě $B = \left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$ se základnou $z = 0$, je určen jako $\operatorname{tg}(\beta) = \|\operatorname{grad} f(b)\| = \|\left(0, -\frac{4}{9}\right)\| = \frac{4}{9}$.

Protože je $\operatorname{tg}(\beta) > \operatorname{tg}(\alpha)$, je v bodě B rovina strmější než v bodě A.

5.3 (tečné roviny)
Najděte rovnici tečné roviny k

(a) elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho : 4x + 2y + z = 3$.

(b) elipsoidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

Řešení:
Použijeme následující důsledek věty o implicitní funkci:

Věta: Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in G \mid f(a) = 0\}$$

vrstevnici funkce f. Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\operatorname{grad} f(a) \neq \vec{0}$, pak tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\operatorname{grad} f(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

(a) V našem případě je $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\operatorname{grad} f(a) = (2x, 4y, 2z)$. Takže $\operatorname{grad} f(a) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je právě $\operatorname{grad} f(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4, 2, 1)$, právě když $(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \operatorname{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

(b) Postupujeme podobně. Rovina, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách, má normálový vektor $\mathbf{n} = (1,1,1)$. Tedy

$$\left(\frac{2x_0}{25}, \frac{2y_0}{16}, \frac{2z_0}{9}\right) = \operatorname{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n} = \lambda \cdot (1,1,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}.$$

5.4 (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají

(a) grafy funkcí $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ a $g(x,y) = \sin(xy)$ v bodě $(1,0,?)$.

(b) plochy $M : x^2 + y^2 + z^2 = 8$ a $N : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$ v bodě $(2,0,2)$.

Řešení:

(a) Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0 \ \& \ (x,y) \neq (0,0)\}$, kde

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z$$

a pro g to bude $\Gamma_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$, kde

$$G(x,y,z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1,0,0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F(A) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, -1\right)_{|A} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G(A) = \Big(y\cos(xy), x\cos(xy), -1\Big)_{|A} = (0,1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Gradienty funkcí

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8$$

a

$$G(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 6$$

v bodě $A = (2,0,2)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F(A) = (2x, 2y, 2z)_{|A} = (4,0,4)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G(A) = \Big(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\Big)_{|A} = (2,-4,-2)\ .$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5.5 (vyšší parciální derivace)
Ukažte, že

(a) každá funkce tvaru $H(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, kde f, g mají spojitou druhou derivaci a $a \in \mathbb{R}$, je řešením vlnové rovnice
$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \ .$$

(b) každá funkce tvaru $F(x,y) = yf(x^2 - y^2)$, kde f má spojitou derivaci, je řešením rovnice
$$y^2 \frac{\partial F}{\partial x} + xy \frac{\partial F}{\partial y} = xF \ .$$

(c) každá funkce tvaru $F(x,y) = x^n f(\frac{y}{x^2})$, kde f má spojitou derivaci a $n \in \mathbb{N}$, je řešením rovnice
$$x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} = nF \ .$$

Řešení:

(a) Jen pro úplnost: Jestliže funkce f má spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené množině G, pak ve všech bodech množiny G existuje také druhá derivace funkce f.

Existenci druhé derivace funkce H tak máme zaručenu. Při výpočtu použijeme derivaci složené funkce a standardní pravidla pro počítání s derivacemi:
$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) &= f'(x+at) \cdot a + g'(x-at) \cdot (-a) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) &= f'(x+at) \cdot 1 + g'(x-at) \cdot 1 \end{aligned}$$
Dále máme
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t) &= f''(x+at) \cdot a^2 + g''(x-at) \cdot (-a)^2 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) &= f''(x+at) \cdot 1^2 + g''(x-at) \cdot 1^2 \end{aligned}$$
takže opravdu $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$.

Řešení vyjadřuje dva proti sobě postupující signály na přímce, které se pohybují stejnou rychlostí o velikosti $|a|$.

(b) Existence první derivace funkce F je opět zaručena. Výpočet je opět standardní:
$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= yf'(x^2-y^2) \cdot (2x) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 1 \cdot f(x^2-y^2) + yf'(x^2-y^2) \cdot (-2y) \end{aligned}$$
Takže opravdu
$$y^2 \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + xy \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) =$$
$$= 2xy^3 f'(x^2-y^2) + xyf(x^2-y^2) - 2xy^3 f'(x^2-y^2) =$$
$$= xyf(x^2-y^2) = xF(x,y) \ .$$

(c) Existence první derivace funkce F je opět zaručena, definičním oborem jsou body, kde $x \neq 0$. Postupujeme podobně:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= nx^{n-1} f\left(\tfrac{y}{x^2}\right) + x^n f'\left(\tfrac{y}{x^2}\right) \cdot \left(-\tfrac{2y}{x^3}\right) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= x^n f'\left(\tfrac{y}{x^2}\right) \tfrac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Takže opravdu

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + 2y\frac{\partial F}{\partial y} =$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2x^{n-2} y f'\left(\frac{y}{x^2}\right) + 2x^{n-2} y f'\left(\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right) = nF(x,y)\ .$$

5.6 (transformace diferenciálního výrazu)

Transformujte výraz

(a) $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$ pomocí polárních souřadnic.

(b) $(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí nových proměnných $r = \sqrt{x^2+y^2}$ a $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

(c) $\frac{1-x^2}{y}\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí proměnných s a t takových, že $x = \frac{t}{s}$ a $y = t + s$.

Řešení:

Vysvětlení: Co to znamená vyjádřit nějaký výraz (případně rovnici) v jiných souřadnicích? Představme si to tak, že v $\mathbb{R}^n$ “žije” funkce f (tj. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Prostor $\mathbb{R}^n$ (nebo jeho část) můžeme ale popisovat také pomocí jiných (křivočarých) souřadnic $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je vhodná množina. Je to podobné, jako když nějaké území na Zemi zachycujeme na různých mapách. A stejně jako nějaká oblast na Zemi vypadá na různých mapách vždy trochu jinak, stejně tak se funkce f vyjádřená pomocí souřadnicového popisu Φ bude také pokaždé jevit jinak (půjde totiž o funkci $f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$).

Pokud např. v případě (a) funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

přiřadíme funkci

$$x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(popsanou standardními souřadnicemi), pak chceme vědět, jak bude vypadat odpovídající přiřazení v polárních souřadnicích pomocí transformace Φ, kdy funkci

$$F := f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$$

přiřazujeme funkci

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \Phi : G \to \mathbb{R}\ .$$

Posledně zmíněnou funkci ovšem chceme vyjádřit pomocí derivací funkce F podle nových souřadnic. Jak je vidět, i přes složení funkce f se zobrazením Φ, jde vlastně pořád o tentýž “objekt”, tj. tutéž “funkci” na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Poznámka: Transformace souřadnic je bijektivní zobrazení. Pro diferencovatelnou transformaci, pak požadujeme, aby definiční obor i obor hodnot byly obě otevřené množiny a inverzní zobrazení bylo také diferencovatelné.

(a) Máme polární souřadnice

$$\begin{aligned}
\Phi : (0,+\infty) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\} \\
(r,\varphi) &\mapsto (x,y)
\end{aligned}$$

ve formě

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi\ .$$

Není těžké zjistit, že se jedná skutečně o bijekci (tj. Φ je prosté a surjektivní) a inverzní zobrazení je také diferencovatelné. Definiční obor transformace Φ si můžeme následně vzít i jiný např. $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ abychom pak pokryli další část $\mathbb{R}^2$, kterou jsme museli vynechat při první volbě definičního oboru transformace. Ovšem bod $(x, y) = (0, 0)$ budeme muset v oboru hodnot vynechávat vždycky, protože tam by transformace nebyla bijektivní.

Nyní potřebujeme vyjádřit hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pomocí hodnot a $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi)$ a $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi)$, kde $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$ a $F(r, \varphi) = f(x, y)$.

Vezmeme si tedy rovnost

$$F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

a použijeme na ní $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial r}$ čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F}{\partial r} &= \tfrac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) &&= \cos\varphi\ \tfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \tfrac{\partial f}{\partial y} \\
\tfrac{\partial F}{\partial \varphi} &= \tfrac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) &&= -r\sin\varphi\ \tfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\ \tfrac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice nebo analogicky vynásobením rovnic tak, abychom získali výraz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= \cos\varphi\ \tfrac{\partial F}{\partial r} - \tfrac{\sin\varphi}{r}\ \tfrac{\partial F}{\partial \varphi} \\
\tfrac{\partial f}{\partial y} &= \sin\varphi\ \tfrac{\partial F}{\partial r} + \tfrac{\cos\varphi}{r}\ \tfrac{\partial F}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\ \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\ \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\ \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\ \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

(b) Jedná se zase o polární souřadnice (tentokrát zúžené), i když to není hned úplně vidět, protože je to zadáno pomocí inverzního zobrazení. Když si totiž vezmeme

$$\Phi : (0, +\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \{(x, y) \mid x > 0\}$$
$$(r, \varphi) \mapsto (x, y)$$

ve formě

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

tak pro Φ^{-1} dostaneme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}\ .$$

Poznámka: Původní výrazy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ sice tvoří diferencovatelné zobrazení na množině $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$, ale na této množině toto zobrazení není prosté: pro (x, y) je stejná hodnota jako pro $(-x, -y)$.

Položme $F = f \circ \Phi$. Parciální derivace f vyjádřené pomocí parciální derivace F teď můžeme spočítat přímo, což také z cvičných důvodů uděláme (i když výsledek samozřejmě už známe z předchozího příkladu). Z rovnosti

$$f(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

ihned máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= (x+y)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - (x-y)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = r\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\,.$$

(c) Budeme postupovat stejně jako v příkladu (a). Položíme $F = f \circ \Phi$ pro $\Phi(s,t) = (x,y)$ a tedy

$$F(s,t) = f\big(x(s,t),\ y(s,t)\big)$$

a dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

takže máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s^2}{t+s} & \frac{s^2}{t+s} \\ \frac{s}{t+s} & \frac{t}{t+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Po dosazení (a vyjádření x a y pomocí s a t) dostáváme

$$\frac{1-x^2}{y}\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{t}{s}\right)^2}{t+s}\left(-\frac{s^2}{t+s}\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{s^2}{t+s}\frac{\partial F}{\partial t}\right) + 2\left(\frac{s}{t+s}\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{t}{t+s}\frac{\partial F}{\partial t}\right) =$$

$$= \left(\frac{t-s}{t+s} + 2\frac{s}{t+s} \right) \frac{\partial F}{\partial s} + \left(\frac{s-t}{t+s} + 2\frac{t}{t+s} \right) \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} \ .$$

Poznámka: Měli bychom ještě zjistit s jakým zobrazením Φ jsme vlastně pracovali, tj. najít definiční obor a obor hodnot tak, aby zobrazení bylo bijektivní atd.:

Definiční obor se určitě musí vyhnout přímce $s = 0$. Dále zjistíme, které body (x, y) můžeme jednoznačně popsat pomocí (s, t), neboli ze vztahu $x = \frac{t}{s}$ a $y = t + s$ určíme s a t. Máme

$$sx = t \quad \text{a} \quad y = sx + s = s(x+1)$$

tedy

$$s = \frac{y}{x+1} \quad \text{a} \quad t = \frac{xy}{x+1}$$

pokud $x \neq -1$. Pokud je $x = -1$ pak je $t = -s$ a tedy $y = t + s = 0$. Tudíž vzory bodu $(x, y) = (-1, 0)$ jsou body $(s, -s)$ pro $0 \neq s \in \mathbb{R}$.

Jestliže si teď zvolíme definiční obor zobrazení Φ jako

$$D_\Phi = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \neq 0 \ \wedge \ s + t \neq 0\}$$

pak jeho bijektivním obrazem bude obor hodnot

$$H_\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -1 \wedge y \neq 0\}$$

Obě tyto množiny jsou otevřené (a navíc se obě rozpadají na 4 disjunktní souvislé otevřené množiny). Zobrazení Φ je tedy určené svým předpisem a tím odkud a kam jde

$$\Phi : D_\Phi \to H_\Phi \ .$$

Co se týče diferencovatelnosti zobrazení Φ i jeho inverze, tu už jsme vlastně zkontrolovali výše a je vidět, že právě ty výrazy ve jmenovatelích, které by nám vadily, jsme odstranili při volbě definičního oboru Φ.