6. cvičení z Matematické analýzy 2

6. - 10. listopadu 2017

6.1 (Taylorův polynom)
Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

(i) funkci $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ v okolí bodu $a_0 = (0,0)$.

(ii) funkci $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ v okolí bodu $a_0 = (2,1)$.

Řešení:
Taylorův polynom řádu 2, který aproximuje funkci f v bodě a_0, je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\mathbf{h}] + \frac{1}{2!} f''(a_0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}]$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Máme

$$f'(a_0) = \left(e^x \ln(1+y),\ \frac{e^x}{1+y} \right)_{|a_0} = (0,1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} e^x \ln(1+y) & \frac{e^x}{1+y} \\ \frac{e^x}{1+y} & -\frac{e^x}{(1+y)^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 0 + (0,1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= h_2 + h_1 h_2 - \frac{1}{2} h_2^2.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = \left(-\frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2} \right)_{|a_0} = (-1,1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-y)^3} & -\frac{2}{(x-y)^3} \\ -\frac{2}{(x-y)^3} & \frac{2}{(x-y)^3} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 1 + (-1,1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - h_1 + h_2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2.$$

6.2 (lokální extrémy)
Nalezněte lokální extrémy funkcí

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(ii) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1,1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\mathbf{h},\mathbf{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (1,1)$ je $f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3$).

(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'(x,y) = \left(6x^2 + y^2 + 10x,\ 2xy + 2y\right)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $6x^2 + y^2 + 10x = 0$ a $(x+1)y = 0$. To nastává právě když $(x,y) = (-1, \pm 2)$ nebo $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y) = (-1, \pm 2)$ je $f''(-1, \pm 2) = \begin{pmatrix} -2 & \pm 4 \\ \pm 4 & 0 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = -16 < 0$) je forma indefinitní a tedy v daných bodech je SEDLO.
- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Forma je zřejmě pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM.
- Pro $(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ je $f''\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. Forma je zřejmě negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM.

Protože např. zúžení funkce $f(x,0) = 2x^3 + 5x^2$ nabývá všech hodnot (stačí zjistit její limity v nekonečnech), tak všechny nalezené extrémy jsou pouze lokální, ale ne globální.

6.3 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

(ii) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$,

(iii) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = -4h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM. Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 6$).

(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'(x,y) = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $(x,y) = (2,-1)$. Druhá derivace

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v $(2,-1)$ je (ostré) lokální MINIMUM $f(2,-1) = -6$. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. *kvadrik*) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y =$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4}y + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 2 \cdot \frac{3}{4}y \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}(y+1)^2 - 6$$

Tedy skutečně $f(x,y) \geq -6$ a rovnost nastává pro $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$ a $y + 1 = 0$ neboli $(x,y) = (2,-1)$.

(iii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 12 \cdot h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$f''\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.

6.4 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$,

(ii) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x,y,z > 0$.

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y,z) = \left(3x^2 - 3y,\ 2y - 3x - 2,\ z + 2\right)$$

Tedy $f' = 0$ právě když

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ 2y &= 3x + 2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

což je právě když $(x,y,z) = (2,4,-2)$ nebo $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $(x,y,z) = (2,4,-2)$ je

$$f''(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

Pro $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$ je

$$f''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x, 0, 0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x, y, z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $f'(x, y, z) = 0$ právě když $y^2 = 4x^2$ a $y^3 = 2xz^2$ a $y = z^3$. Řešení pro $x, y, z > 0$ je pouze $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ & & \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ & & \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ je

$$f''\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.