7. cvičení z Matematické analýzy 2

13. - 17. listopadu 2017

7.1 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty

(i) funkce $f(x,y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,

(ii) funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$,

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:

Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \;\&\; \Phi'(a) \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \ldots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

(i) V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^2$ a $\Phi(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Protože

$$\Phi'(x,y) = \Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

tak $\Phi'(x,y)$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'(x,y) = 0$) právě když $(x,y) = (0,0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y) = 0$ a $\Phi'(x,y) = 0$. Takže v každém bodě množiny

$$M : \quad 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$$

je $\Phi'(x,y)$ regulární. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-1) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1,-1), \quad (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1) = 5, \quad f(-1,1) = 1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma $Q(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1,-1)$ a $(-1,1)$.

(ii) Doplněním na čtverec snadno zjistíme, že vazba představuje kružnici

$$M: \quad (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3$$

tedy omezenou uzavřenou množinu. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro

$$\Phi(x,y) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3\ .$$

Protože

$$\Phi'(x,y) = \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

tak $\Phi'(x,y)$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'(x,y) = 0$) právě když $(x,y) = (1,-1)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y) = 0$ a $\Phi'(x,y) = 0$. Takže v každém bodě množiny M je $\Phi'(x,y)$ regulární. Pro extrém $a = (x,y)$ na M tak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x, 4y) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

a

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3.$$

Vyjádříme $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ a $y = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ pomocí λ (zřejmě $\lambda \neq 1$ jinak by rovnice neměly řešení) a dosadíme do vazby. Dostaneme $(\lambda-1)^2 = 1$ s řešením $\lambda \in \{0,2\}$ a kandidáty na extrémy:

$$(2,-2)\,, \qquad (0,0)$$

s hodnotami

$$f\,(2,-2) = 12, \qquad f\,(0,0) = 0.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

7.2 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem)

Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:
Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ: \quad x^2 + y^2 < 1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A: \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Jestliže $a = (x, y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$T'(a) = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a skutečně je pak $a \in A^\circ$.

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na

$$\partial A : \quad \Phi(x, y) = 0$$

kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = T'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \ (1, 0), \ (-1, 0), \ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.3 Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

$$M : \ x^2 + y^2 \leq 2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 2. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad x^2 + y^2 = 2 \ .$$

Extrém na M°:

$$f' = \big(3y, \ 3x\big) = (0, 0)$$

nastává právě když $(x, y) = (0, 0)$. Máme tak podezřelý bod $(x, y) = (0, 0)$ s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$\pm(1, -1), \qquad \pm(1, 1),$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1, 1\big) = f\big(1, -1\big) = -3, \qquad f\big(1, 1\big) = f\big(-1, -1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\pm(1, 1)$ a minima v bodech $\pm(1, -1)$.

7.4 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině

$$M: \quad x \geq 0 \ \ \& \ \ y \geq 0 \ \ \& \quad x + y \leq 6\ .$$

Řešení:

Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(6, 0)$ a $(0, 6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x > 0 \ \ \& \ \ y > 0 \ \ \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq y \leq 6) \ \ \vee \\ (x + y = 6 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hrany trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníku).

Extrém na M°:

$$f' = \big(8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y\big) = (0, 0)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y \ .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2,1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2,1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6-t) \quad \text{pro} \quad t \in (0,6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6-t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t-4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$. Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minimum v bode $(4,2)$.

7.5 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \le y \le 4 \ .$$

Řešení:

Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \ \ \& \ \ -2 \le x \le 2) \ \ \vee \\ (y = 4 \ \ \& \ \ -2 \le x \le 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka) a dva body (kde se obě křivky protínají).

Extrém na M°:

$$f' = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x \; .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách je nejvhodnější zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• na části hyperboly vyšetřujeme funkci

$$g_1(x) := f(x, x^2) = 4x^2 + x^4 \quad \text{pro} \quad x \in (-2, 2) \; .$$

Máme $g_1'(x) = 8x + 4x^3 = 0$ právě když $x = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• na úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_2(x) := f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad \text{pro} \quad x \in (-2, 2) \; .$$

Rovnice $g_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 2(3x-2)(x+2) = 0$ má řešení pro $x = \frac{2}{3} \in (-2, 2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{352}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2, 4)$ a $(2, 4)$ s hodnotami $f(-2, 4) = f(2, 4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2, 4)$ a $(2, 4)$ a minimum v bodě $(0, 0)$.

7.6 (vázané extrémy - vzdálenost)

Na elipse $M : \; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p : \; 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:

Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x, y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$ (pro $\mathbb{R}^2$ je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v $\mathbb{R}^3$ má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovině ρ. Vzdálenost bodu $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| .$$

Protože bod b je v rovině ρ, platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} .$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x,y)=10\cdot\Big(f(x,y)\Big)^2=(3x+y-9)^2$$

  (snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $3x+y-9$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x,y)=3x+y-9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x,y):=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1(=0)$ je zřejmě $\mathrm{grad}(\Phi)=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9}\right)\neq 0$. Pro bod $a=(x,y)\in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že

$$(3,\ 1)=\mathrm{grad}(h)_{|a}=\lambda\cdot\mathrm{grad}(\Phi)_{|a}=\lambda\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9}\right)$$

a

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2}=3\cdot\lambda\frac{2y}{9},$$

tedy $\lambda=0$ nebo $y=\frac{3}{4}x$.

Pokud $\lambda=0$, pak platí $3x+y-9=0$ a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p, který je ale prázdný.

Takže zbývá případ $y=\frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1=\frac{x^2}{4}+\frac{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}{9}=\frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x,y)=\pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

(2) Použijeme "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

Tvrzení: Pokud je množina M (daná vazbou)

- *uzavřená,*
- *omezená* a
- *má tečny ve všech svých bodech,*

pak body z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a=(x,y)\in M$ je gradientem funkce Φ. Hledáme tedy body $a=(x,y)\in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9}\right) = \mathrm{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda\cdot(3,1)$$

a

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y=\frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

Poznámka: Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M, pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale *NENÍ uzavřená*: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je formálně z postupu získali).
- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale *NENÍ omezená*: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale *NEMÁ tečny ve všech svých bodech*: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník) (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).

(3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x,y) a (u,v) jako

$$h(x,y,u,v) = (x-u)^2+(y-v)^2$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ a $3u+v-9=0$. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dvě vazby

$$\Phi_1(x,y,u,v) = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$$

a

$$\Phi_2(x,y,u,v) = 3u+v-9$$

s gradienty

$$\mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} = \left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},0,0\right)$$

$$\mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = (0,0,3,1)$$

kde $a=(x,y,u,v)$. Označme si

$$K = \{a\in\mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a)=0 \ \&\ \Phi_2(a)=0\}.$$

Pro body $a\in K$ jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, že

$$\Big(2(x-u),2(y-v),2(u-x),2(v-y)\Big) = \mathrm{grad}(h)_{|a} = \lambda\cdot\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},0,0\right)+\mu\cdot(0,0,3,1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{a} \quad 3u + v - 9 = 0$$

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 2(x-u) = -3\mu$$

$$\lambda\frac{2y}{9} = 2(y-v) = -\mu$$

tedy opět rovnici $\lambda\left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{3}\right) = 0$, kde případ $\lambda = 0$ opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(x_2, y_2) = -\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

a pomocí rovnice $x - u = 3(y - v)$ dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{27\sqrt{5}-9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5}+27}{10\sqrt{5}}\right)$$

$$(u_2, v_2) = \left(\frac{27\sqrt{5}+9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5}-27}{10\sqrt{5}}\right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdálenosti) bodů $a_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ platí

$$h(a_1) < h(a_2).$$

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro $a \in K$ a $\|a\| \to \infty$ jdou hodnoty $h(a)$ také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ byly hodnoty funkce h větší než např. $h(a_2)+1$. A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině $K \cap B$ bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině $K \cap \partial B$ budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě $h(a_2) + 1$ (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$).
- Na množině $K \cap B^\circ$ (díky otevřenosti množiny B°) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body a_1 a a_2 (které se evidentně musí nacházet v $K \cap B^\circ$ díky svým funkčním hodnotám$h(a_1) < h(a_2) < h(a_2) + 1$).
- Absolutní minimum funkce h na množině $K \cap B$ se tedy NEMŮŽE nacházet na "okraji" $K \cap \partial B$ protože tam je funkce "moc velká" a může to tedy být jedině bod a_1. Současně i na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ je funkce "moc velká," a bod a_1 je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K.

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce "v nekonečnu roste do nekonečna."

A co bod a_2? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

7.7 (vázané extrémy - vzdálenost)
Najděte vzdálenost paraboly $M: \ y = x^2$ od přímky $p: \ y = x - 2$.

Řešení:
Můžeme použít některý z předchozích postupů, ale musíme si uvědomit, že parabola není omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p i zde "v nekonečnu roste do nekonečna." Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p: \ x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce

$$\rho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

7.8 (extrémy pro dvě vazby)
Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

(i) $x + y + z = 5$ a $xy + yz + zx = 8$.

(ii) $x + y + z = 0$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení:
(i) Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \& \ \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:
Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:
Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x + y)(5 - x - y) = 8$$

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (y + z, z + x, x + y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y + z = z + x = x + y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y + z, z + x, x + y)$$

a

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + \mu(y + z)$$

$$zx = \lambda + \mu(z + x)$$

dostaneme $z(y - x) = \mu(y - x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \quad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

$$M: \quad \Phi_1(a) = 0 \ \& \ \Phi_2(a) = 0 \ .$$

uzavřenost M: stejné zdůvodnění jako v (i).

omezenost M: Jedna z vazeb představuje sféru, takže i M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (2x, 2y, 2z)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 0$ a $3x^2 = 1$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme korektně použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x + y + z = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Když opět od sebe odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + 2\mu x$$

$$zx = \lambda + 2\mu y$$

dostaneme $z(y - x) = 2\mu(x - y)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = 2\mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = 2\mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = 2\mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{ kde } \quad f(a) = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

a

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{ kde } \quad f(a) = -\frac{\sqrt{6}}{18}\ .$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech maximum a v druhých minimum.