9. cvičení z Matematické analýzy 2

27. listopadu - 1. prosince 2017

9.1 Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = t^2$ na $[-1, 1)$ a její součet.

Řešení:

Definice: Nechť f je T-periodická funkce, která je integrabilní na intervalu $[0, T]$.

Její **Fourierovu řadu** definujeme jako $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je její frekvence,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt, \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

a

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt, \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Toto pak zapisujeme jako

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right].$$

Tvrzení: (i) Pokud f je lichá, pak $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$.

(ii) Pokud f je sudá, pak $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt$.

Pro naši funkci f máme $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$. Funkce f je sudá a dostáváme tak

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t)\, dt = \int_{-1}^1 f(t)\, dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{t^2 \cos(k\pi t)}_{suda}\, dt = 2 \int_0^1 t^2 \cos(k\pi t)\, dt = \underbrace{\left[2t^2 \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 4t \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\, dt =$$

$$= \left[4t \frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 4 \frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\, dt = \frac{4\cos(k\pi)}{\pi^2 k^2} - \underbrace{\left[4 \frac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^3}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2},$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{t^2 \sin(k\pi t)}_{licha}\, dt = 0.$$

Tudíž máme

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t).$$

Jordanovo kritérium: Nechť f je T-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu I délky T. Předpokládejme, že její derivace f' je po částech spojitá na I.

Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N\to\infty}\left(\tfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}\big[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big]\right)=\tfrac{1}{2}[f(t^-)+f(t^+)].$$

Pokud je f navíc spojitá $\mathbb{R}$, pak $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big]$ konverguje k f *stejnoměrně.*

Pro náš příklad tudíž pro $t\in[-1,1]$ dostáváme, že $t^2=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{\pi^2k^2}\cos(k\pi t)$.

Speciálně pro $t=0$ pak takto získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

a pro $t=1$ pak podobně

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Parsevalova rovnost: Nechť f je T-periodická funkce, která má konečný integrál z f a z f^2 na nějakém intervalu I délky T. Pak pro koeficienty a_n, b_n z její Fourierovy řady platí rovnost

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt=\tfrac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

.

Pro náš příklad tudíž z Parsevalovy rovnosti dostáváme, že

$$\tfrac{2}{9}+\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{16}{\pi^4k^4}=\int_{-1}^{1}t^4\,dt=\tfrac{2}{5}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}\ .$$

Poznámka: Parsevalova rovnost je vlastně zobecněná Pythagorova veta. Uvažujme vektorový prostor všech integrabilních funkcí na intervalu $[0,T]$ takových, že mají i integrabilní kvadrát na intervalu $[0,T]$, a skalární součin těchto funkcí definovaný jako

$$\langle f,g\rangle=\int_0^T f(t)g(t)\,dt\ .$$

Označíme si obvyklou normu $\|f\|^2:=\langle f,f\rangle$. Pak ze zápisu

$$f\sim\tfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big]$$

pro námi uvažované funkce f plyne

$$\|f\|^2=\underbrace{\|\tfrac{a_0}{2}\|^2}_{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\cdot T}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\|a_k\cos(k\omega t)\|^2}_{a_k^2\cdot\frac{T}{2}}+\underbrace{\|b_k\sin(k\omega t)\|^2}_{b_k^2\cdot\frac{T}{2}}\Big)$$

protože

$$\|1\|^2=\int_0^T 1^2\,dt=T$$

$$\|\cos(k\omega t)\|^2 = \int\limits_0^T \cos^2(k\omega t)\,dt = \tfrac{T}{2}$$

$$\|\sin(k\omega t)\|^2 = \int\limits_0^T \sin^2(k\omega t)\,dt = \tfrac{T}{2}$$

pro $k \geq 1$ a protože funkce

$$1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \ldots$$

jsou vzájemně kolmé ve skalárním součinu. Dokonce tvoří (v určitém smyslu) ortogonální bázi námi uvažovaného prostoru.

Tedy skutečně máme

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T f^2(t)\,dt = \frac{2}{T}\|f\|^2 = \tfrac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\ .$$

9.2 Mějme funkci

$$f(t) = \begin{cases} t & ,\ t \in [0,1), \\ 0 & ,\ t \in [1,2). \end{cases}$$

Určete

(a) Fourierovu řadu

(b) sinovou Fourierovu řadu

(c) kosinovou Fourierovu řadu

příslušného periodického rozšíření funkce f.

Řešení:

Definice: Nechť f je funkce spojitá na $[0,L)$. Její *sinová Fourierova řada* je definována jako Fourierova řada jejího lichého periodického rozšíření a její *kosinová Fourierova řada* je definována jako Fourierova řada jejího sudého periodického rozšíření.

Tvrzení: Sinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty $a_k = 0$, $b_k = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Kosinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty $b_k = 0$, $a_k = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Poznámka: Součet sinové Fourierovy řady je $T = 2L$-periodické rozšíření funkce f do liché funkce. Součet kosinové Fourierovy řady je $T = 2L$-periodické rozšíření funkce f do sudé funkce. Oba součty je potřeba ještě upravit pomocí Jordanova kritéria.

(i) Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,dt = \int\limits_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \tfrac{2}{2}\int\limits_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[t\cdot\tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int\limits_0^1 \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \tfrac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int\limits_0^1 t\sin(k\pi t)\,dt = -\left[t\cdot\tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + \int\limits_0^1 \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \underbrace{\left[\tfrac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

Takže

$$f \sim \tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t)$$

(ii) Pro sinovou Fourierovu řadu funkce f máme: $L = 2$, $T = 2L = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{L} = 1$.

Uvažujeme teď liché rozšíření funkce f (a pak periodické prodloužení), takže koeficienty u sudých funkcí budou nulové, tj. $a_k = 0$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

$$b_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t \sin\left(k\tfrac{\pi}{2} t\right)\, dt = -\left[t \cdot \frac{\cos(k\frac{\pi}{2} t)}{k\frac{\pi}{2}} \right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{\cos(k\frac{\pi}{2} t)}{k\frac{\pi}{2}}\, dt = -\frac{2\cos(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} + \underbrace{\left[\frac{\sin(k\frac{\pi}{2} t)}{(k\frac{\pi}{2})^2} \right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} =$$

$$= -\frac{2\cos(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} + \frac{4\sin(k\frac{\pi}{2})}{(k\pi)^2} = \begin{cases} -\frac{2}{k\pi}, & \text{pro } k = 4n \\ \frac{4}{(k\pi)^2}, & \text{pro } k = 4n+1 \\ \frac{2}{k\pi}, & \text{pro } k = 4n+2 \\ -\frac{4}{(k\pi)^2}, & \text{pro } k = 4n+3 \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. Takže sinová Fourierova řada funkce f je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4\sin(k\frac{\pi}{2})}{(k\pi)^2} - \frac{2\cos(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \right] \sin\left(k\tfrac{\pi}{2} t\right).$$

(iii) Pro kosinovou Fourierovu řadu funkce f máme: $L = 2$, $T = 2L = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{L} = 1$.

Uvažujeme teď sudé rozšíření funkce f (a pak periodické prodloužení), takže koeficienty u lichých funkcí budou nulové, tj. $b_k = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

$$a_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t \cos\left(k\tfrac{\pi}{2} t\right)\, dt = \left[t \cdot \frac{\sin(k\frac{\pi}{2} t)}{k\frac{\pi}{2}} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{\sin(k\frac{\pi}{2} t)}{k\frac{\pi}{2}}\, dt = \frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} + \left[\frac{\cos(k\frac{\pi}{2} t)}{(k\frac{\pi}{2})^2} \right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} + 4 \cdot \frac{\cos(k\frac{\pi}{2}) - 1}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 4n \\ \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{(k\pi)^2}, & \text{pro } k = 4n+1 \\ -\frac{8}{(k\pi)^2}, & \text{pro } k = 4n+2 \\ -\frac{2}{k\pi}, & \text{pro } k = 4n+3 \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. Takže kosinová Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} + 4 \cdot \frac{\cos(k\frac{\pi}{2}) - 1}{(k\pi)^2} \right] \cos\left(k\tfrac{\pi}{2} t\right).$$

9.3 Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = |t|$, $-1 \le t < 1$.

Řešení:
Perioda rozšíření bude $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Rozšíření funkce f je sudé, takže $b_k = 0$. Zbylé koeficienty Fourierovy řady jsou tyto:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} dt = 1;$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t \cos k\pi t\,dt = 2\left[t\frac{\sin k\pi t}{k\pi} + \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2n \\ -\frac{4}{k^2\pi^2}, & \text{pro } k = 2n+1 \end{cases}$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Protože periodické rozšíření funkce f je spojité, tak Fourierova řada k němu konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$. Proto můžeme napsat dokonce

$$|t| = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi t, \qquad t \in [-1, 1].$$

9.4 Určete sinovou Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce $f(t) = \sin t$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$. Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.

Řešení:
K určení sinové Fourierovy řady funkce definované na intervalu $[0, L)$, musíme začít s lichým rozšířením funkce f na interval $[-L, L)$ s frekvencí $\omega = \frac{2\pi}{2L} = 2$.

Budeme tak mít $L = \frac{\pi}{2}$ a liché rozšíření naší funkce na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tak bude opět funkce sinus. Proto sinová Fourierova řada funkce $f(t) = \sin t$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ je totéž jako Fourierova řada funkce $f(t) = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}$. Z lichosti plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt)\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(2k-1)t - \cos(2k+1)t\Big)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} - \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$$

protože

$$\sin\Big((2k+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) = (-1)^k \text{ pro } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Liché periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje sinová Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje sinová Fourierova řada k lichému periodickému rozšíření funkce f.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \ .$$

9.5 Mějme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [0,1), \\ -2 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

Určete Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce f.

Řešení:
Pro Fourierovu řadu máme $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Určíme koeficienty:

$$a_0 = \frac{2}{2}\Big(\int_0^1 1\,dt + \int_1^2 -2\,dt\Big) = -1;$$

$$a_k = \frac{2}{2}\Big(\int_0^1 \cos k\pi t\,dt - 2\int_1^2 \cos k\pi t\,dt\Big) = \left[\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} - 2\left[\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\right]_{t=1}^{t=2} = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{2}\Big(\int_0^1 \sin k\pi t\,dt - 2\int_1^2 \sin k\pi t\,dt\Big) = -\left[\frac{\cos k\pi t}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + 2\left[\frac{\cos k\pi t}{k\pi}\right]_{t=1}^{t=2} =$$

$$= \frac{3}{k\pi}\Big[1 - (-1)^k\Big] = \begin{cases} 0 & , \text{ pro } k \text{ sudé}, \\ \frac{6}{k\pi} & , \text{ pro } k \text{ liché}. \end{cases}$$

Proto pro lichá čísla $k = 2n+1$ dostaneme tvar

$$f \ \sim \ -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k\pi}\Big[1 - (-1)^k\Big] \sin k\pi t \ = \ -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

9.6 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,\pi), \\ 0, & t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

a určete její součet.

Řešení:
Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce f není ani lichá ani sudá. Spočítáme koeficienty Fourierovy řady funkce f:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\cos(kt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \big(\sin(k+1)t - \sin(k-1)t\big)\,dt =$$

$$= [\text{dále platí pro } k\geq 2] = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)t}{k+1} + \frac{\cos(k-1)t}{k-1}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1} - \frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}-1}{2\pi}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{(-1)^{k+1}-1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2-1} \quad \text{pro } k\geq 2.$$

Pro $k=1$ máme

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \sin(2t)\,dt = 0\ .$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\sin(kt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \big(\cos(k-1)t - \cos(k+1)t\big)\,dt =$$

$$= [\text{dále platí pro } k\geq 2] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(k-1)t}{k-1} - \frac{\sin(k+1)t}{k+1}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \quad \text{pro } k\geq 2.$$

Pro $k=1$ máme

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\sin t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi 1-\cos(2t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2}\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\big] =$$
$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá k a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

pro všechna $t\in\mathbb{R}$.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

a tedy

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big)\ .$$

A podobně

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)\ .$$

Aplikace: Mějme veličinu $x(t)$, která je periodicky závislá na čase t a splňuje následující obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu (tj. takovou, kde se vyskytují derivace funkce $x(t)$ nejvýše 2. řádu):

$$\ddot{x}(t) + 9x(t) = f(t)$$

zde $\ddot{x}(t)$ znamená druhou derivaci podle času t a $f(t)$ je funkce ze zadání. Takovouto rovnici získáme např. z určitých elektrických obvodů a $x(t)$ představuje napětí v obvodu.

Abychom našli řešení $x(t)$ této rovnice, rozvineme si veličinu $x(t)$ do Fourierovy řady s periodou $T = 2\pi$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (řada se musí rovnat $x(t)$ díky spojitosti) a zderivujeme ji (což jde udělat člen po členu):

$$x(t) = \tfrac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[A_k\cos(kt) + B_k\sin(kt)\big]$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\big[-kA_k\sin(kt) + kB_k\cos(kt)\big]$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\big[-k^2A_k\cos(kt) - k^2B_k\sin(kt)\big]$$

Dosazením dostáváme

$$\tfrac{9A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[(9-k^2)A_k\cos(kt) + (9-k^2)B_k\sin(kt)\big] = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)$$

a protože rozvoj je jednoznačný, tak se musí koeficienty na obou stranách rovnat. Odsud dostaneme

- $\frac{9A_0}{2} = \frac{1}{\pi}$,
- $\big(9-(2n)^2\big)A_{2n} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}$, pro $n \geq 1$,
- $A_1 = A_{2n+1} = 0$, pro $n \geq 2$,
- $\big(9-1^2\big)B_1 = \frac{1}{2}$,
- $B_2 = B_k = 0$, pro $k \geq 4$,

takže řešení je celkem toto:

$$x(t) = A_3\cos(3t) + B_3\sin(3t) + \tfrac{1}{9\pi} + \tfrac{1}{16}\sin t + \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\cos(2nt)}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$$

kde $A_3, B_3 \in \mathbb{R}$ jsou volné parametry.