**Vzorový 1. zápočtový test**

**1.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4y + 1$$

na množině

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le (x-1)^2 \ .$$

Situaci načrtněte.

**Řešení:**
Množina $M$ je část ležící pod parabolou a v prvním kvadrantu (je to takový prohnutý trojúhelník). Zřejmě je omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad rozdělíme (podle obrázku) na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad 0 < x < 1 \quad \& \quad 0 < y < (x-1)^2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y=0 \ \ \& \ \ 0 \le x \le 1) \ \ \vee \\ (x=0 \ \ \& \ \ 0 \le y \le 1) \ \ \vee \\ (y=(x-1)^2 \ \ \& \ \ 0 \le x \le 1) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři křivky (část paraboly a úsečky) a tři body (kde se křivky protínají).

**Extrém na $M^\circ$:**

$$f' = \big(2x+2y, 2x-4\big) = (0,0)$$

nastává právě když $(x,y) = (2,-2)$. Tento bod ale neleží v $M^\circ$, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

**Extrém na $\partial M$:**

Na daných křivkách je nejvhodnější zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• na části paraboly vyšetřujeme funkci

$$g_1(x) := f\big(x,(x-1)^2\big) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 3 \quad \text{pro} \quad x \in (0,1) \ .$$

Protože rovnice $g_1'(x) = 2(3x^2 - 7x + 5) = 0$ nemá řešení, opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• na první úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_2(x) := f(x,0) = x^2 + 1 \quad \text{pro} \quad x \in (0,1) \ .$$

Ani nemusíme hledat derivaci, aby bylo jasné, že na intervalu $(0,1)$ je funkce $g_2$ ostře rostoucí, takže nemá žádné lokální extrémy. Opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• na druhé úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_3(y) := f(0,y) = -4y + 1 \quad \text{pro} \quad y \in (0,1) \ .$$

Opět nemusíme hledat derivaci, aby bylo jasné, že na intervalu $(0,1)$ je funkce $g_3$ ostře klesající, takže nemá žádné lokální extrémy. Opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• zbývají tedy už jen tři průsečíky křivek $(0,0)$, $(0,1)$ a $(1,0)$ s hodnotami $f(0,0) = 1$, $f(0,1) = -3$ a $f(1,0) = 2$, které představují jediné podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodě $(1,0)$ a minima v bodě $(0,1)$.

**2.** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, x^{2n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

(**Alternativní příklad:** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,\pi), \\ 0, & t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

a určete její součet.)

**Řešení:**

*Poloměr konvergence:* Máme

$$a_k = \begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{k-1}{4}, & \text{pro } k = 2n+1 \geq 3 \text{ liché}, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

takže nemůžeme přímo použít podílové kritérium. Stačí ale řadu trochu přepsat, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\, (x^2)^n$$

a zjistit poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, y^n$, která má podle podílového kritéria $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ poloměr konvergence roven 1, tj. konverguje pro $|y| < 1$ a diverguje pro $|y| > 1$. Pro $y = x^2$ tak dostáváme, že pro $|x^2| < 1$ to konverguje a pro $|x^2| > 1$ to diverguje. Neboli poloměr konvergence původní řady je rovněž $R = 1$. Mohli jsme ovšem také na začátku využít i $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \cdots = 1$.

*Součet:* Využijeme toho, co už máme, tj. pro $|y| < 1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n\, y^{n-1} = y \left( \sum_{n=1}^{\infty} y^n \right)' = y \left( \frac{1}{1-y} - 1 \right)' = \frac{y}{(1-y)^2}\ .$$

Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\, (x^2)^n = \frac{x \cdot x^2}{2(1-x^2)^2} = \frac{x^3}{2(1-x^2)^2}$$

pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

**Alternativní příklad:**

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce $f$ není ani lichá ani sudá. Spočítáme koeficienty Fourierovy řady funkce $f$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{1}{\pi} \Big[ -\cos t \Big]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(kt)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \big( \sin(k+1)t - \sin(k-1)t \big)\, dt =$$

$$= [\text{dále platí pro } k \geq 2] = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)t}{k+1}+\frac{\cos(k-1)t}{k-1}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1}-\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}\right)=$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}-1}{2\pi}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{(-1)^{k+1}-1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2-1} \quad \text{pro } k \geq 2.$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(2t)\, dt = 0 \ .$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin(kt)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \big(\cos(k-1)t - \cos(k+1)t\big)\, dt =$$

$$= [\text{dále platí pro } k \geq 2] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(k-1)t}{k-1} - \frac{\sin(k+1)t}{k+1}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \quad \text{pro } k \geq 2.$$

Pro $k = 1$ máme

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin t \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 1 - \cos(2t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2} \ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá $k$ a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce $f$ je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

**Poznámka:** Použili jsme vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

a tedy

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big) \ .$$

A podobně

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \ .$$