Vzorový 2. zápočtový test

1. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint\limits_{E} \frac{y^2 x}{x^2+y^2}\, dS,$$

kde

$$E: \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4 \quad \& \quad x \le 0$$

Oblast E načrtněte.

Řešení:
Oblast E je polovina mezikruží. Použijeme proto polární souřadnice

$$\Phi : x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

a oblast parametrizujeme množinou

$$U: \quad 1 \le r \le 2 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi \ .$$

Pak máme

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} x^2 y\ dS = \iint\limits_{U} \frac{1}{r^2}(r^2\sin^2\varphi)\cdot(r\cos\varphi)\cdot r\ dr\ d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int\limits_{1}^{2} r^2 \sin^2\varphi\cos\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_{1}^{2} r^2\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\ d\varphi\right) = \frac{2^3-1^3}{3}\cdot\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}} = \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{9}\ .$$

2. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iiint\limits_{E} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}V,$$

kde

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2z$$

Oblast E načrtněte.

Řešení:
Oblast E je koule o poloměru 1 se středem v $(0,0,1)$. Použijeme sférické souřadnice

$$\Phi: \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

a po dosazení do podmínky pro E dostáváme

$$r^2 \le 2r\cos\vartheta\ .$$

Specialně tedy platí, že $r \leq 2\cos\vartheta$ pro $r > 0$ a $\cos\vartheta \geq 0$. Oblast E tak parametrizujeme množinou

$$U: \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 2\cos\vartheta \ .$$

Pak máme

$$\iiint\limits_{E=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r \cdot |r^2 \sin\vartheta|\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\vartheta} r^3 \sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\cos\vartheta} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\vartheta \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} 4\ \mathrm{d}\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\vartheta \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\right) = 8\pi \cdot \left[-\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}\pi \ .$$