1. cvičení z Matematické analýzy 2

1.-5. října 2018

1.1 Najděte a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$,

(b) $f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$,

(c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,

Řešení:

(a) $D(f):\ x^2+y^2 \leq 1$

(b) $D(f):\ (x,y) \neq (0,0) \ \wedge\ \big[(y \leq 0 \ \wedge\ y \leq -2x) \ \vee\ (y \geq 0 \ \wedge\ y \geq -2x)\big]$

(c) $D(f):\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \geq (\frac{1}{2})^2 \ \vee\ (x-1)^2+y^2 < 1$

1.2 Vyjádřete funkci $f(x,y)$, jestliže platí $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ taková, že $x \neq 0$.

Řešení:
Položme $a = x+y$ a $b = \frac{y}{x}$. Hledáme tedy vyjádření hodnoty $f(a,b)$ jako funkci (a,b). Dostaneme, že $a = x + bx = (1+b)x$, tedy $x = \frac{a}{b+1}$ a $y = \frac{ab}{b+1}$ pokud $b \neq -1$. Protože (z definice) musí být, $x \neq 0$, tak také musí být $a \neq 0$.

Pro $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ taková, že $a \neq 0$ a $b \neq -1$ dostáváme

$$f(a,b) = f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 = \left(\frac{a}{b+1}\right)^2 - \left(\frac{ab}{b+1}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{1-b^2}{(b+1)^2} = a^2 \cdot \frac{1-b}{1+b} \ .$$

Nakonec se podíváme, co nastane, pokud je $a = 0$ nebo $b = -1$. Zřejmě pro $x \neq 0$ je

$$0 = a = x+y \quad \Leftrightarrow \quad x = -y \quad \Leftrightarrow \quad -1 = b = \frac{y}{x}$$

Jediný další bod, kde máme ze zadání určenou hodnotu je tedy $(a,b) = (0,-1)$ a to např. pomocí bodu $(x,y) = (1,-1)$ jako

$$f(0,-1) = f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = 1^2 - (-1)^2 = 0 \ .$$

1.3 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf této funkce a popište vrstevnice této funkce (vrstevnice na hladině $c \in \mathbb{R}$ je množina tvaru $\{(x,y) \in D_f \mid f(x,y) = c\}$):

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ (eliptický paraboloid),

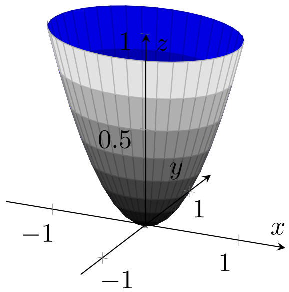
(b) $f(x,y) = xy$ (hyperbolický paraboloid),

(c) $f(x,y) = \sqrt{4+x^2+y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu),

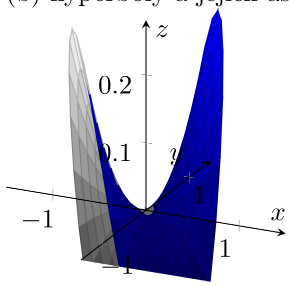
(d) $f(x,y) = \sqrt{4+x^2-y^2}$ (horní polovina jednodílného rotačního hyperboloidu).

Řešení:
Vrstevnice jsou

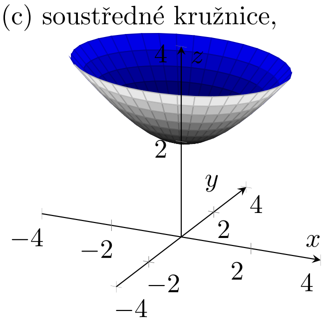
(a) soustředné elipsy,



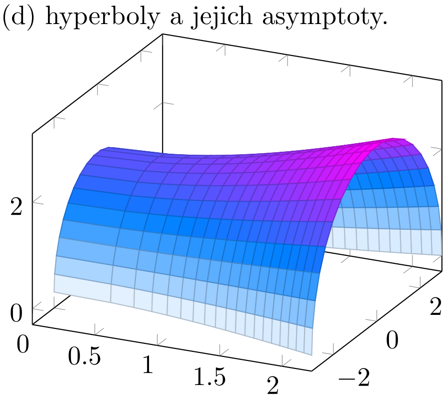
(b) hyperboly a jejich asymptoty,



(c) soustředné kružnice,



(d) hyperboly a jejich asymptoty.



Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je eukleidovská vzdálenost bodu a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \dots, x_n)$$

a

$$a = (y_1, \dots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \ \overset{\text{def}}{\iff} \ (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \ \overset{\text{def}}{\iff} \ (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset\ \wedge\ U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

  neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$.

1.4 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících funkcí. Množiny načrtněte.

(a) $f(x, y) = \ln\left(x \ln(y - x)\right)$;

(b) $f(x, y) = \arcsin(4 - x^2 - y^2) + \arcsin(2xy)$;

(c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

Řešení:
Příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtu.

(a) $D(f):\ (x > 0\ \wedge\ y - x > 1)\ \vee\ (x < 0\ \wedge\ 0 < y - x < 1)$

(b) $D(f):\ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 5\ \wedge\ -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$

(c) $D(f):\ (x^2 + 2x + y^2 \geq 0\ \wedge\ x^2 - 2x + y^2 > 0)\ \vee\ (x^2 + 2x + y^2 \leq 0\ \wedge\ x^2 - 2x + y^2 < 0)$

1.5 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak $||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| \le \sqrt{2} \cdot \varepsilon$. Speciálně tedy v libovolném okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \quad \text{a} \quad \partial\mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2.$$

1.6 Určete izolované a hromadné body množiny $M = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Řešení:
Nejdříve ukážeme, že všechny body množiny M jsou izolované:

Izolovaný bod $a \in M$ množiny M je takový, že

$$(\exists \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(a) \cap M = \{a\}\ .$$

Označme si pro jednoduchost $D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Takže máme, že $M = D \times D \subseteq \mathbb{R}^2$. Pro bod $\frac{1}{n} \in D$ je nejbližším bodem z D bod $\frac{1}{n+1}$.

Pro bod $a = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in M$ si teď stačí zvolit $\varepsilon = \min\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\}$ a ihned máme, že $U_\varepsilon(a) \cap M = \{a\}$, tedy bod a je izolovaný bod množiny M.

Hromadný bod $a \in \mathbb{R}^2$ množiny M je takový, že

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

neboli v každém prstencovém okolí bodu a je nějaký bod množiny M.

Nejdříve ukážeme, že hromadné body jsou určitě body $(0, 0)$ a body $(0, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, 0)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro $\varepsilon > 0$ si stačí zvolit $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{k} < \frac{\sqrt{2}}{k} < \varepsilon$. Pak je

$$||\left(0, \tfrac{1}{n}\right) - \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{n}\right)|| = \sqrt{(0 - \tfrac{1}{k})^2 + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})^2} = \tfrac{1}{k} < \varepsilon$$

$$||\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) - \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{k}\right)|| = \sqrt{(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})^2 + (0 - \tfrac{1}{k})^2} = \tfrac{1}{k} < \varepsilon$$

$$||(0, 0) - \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right)|| = \sqrt{(0 - \tfrac{1}{k})^2 + (0 - \tfrac{1}{k})^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{k} < \varepsilon$$

Takže uvedené body jsou skutečně hromadné.

A nakonec ukážeme, že jiné hromadné body už nejsou. Všechny dosud uvažované body (tj. izolované a nalezené hromadné) dohromady tvoří množinu $N = (\{0\} \cup D) \times (\{0\} \cup D)$. Všimněme si, že její doplněk do $\mathbb{R}^2$ tj. množina $\mathbb{R}^2 \setminus N$ se dá napsat jako sjednocení následujících otevřených intervalů

$$(-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \qquad (1, +\infty) \times \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}) \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times (-\infty, 0), \qquad \mathbb{R} \times (1, +\infty) \qquad \text{a} \qquad \mathbb{R} \times (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n})$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Tedy každý bod z $\mathbb{R}^2 \setminus N$ je v $\mathbb{R}^2 \setminus N$ i s nějakým svým okolím, protože všechny intervaly jsou otevřené. Takový bod tedy nemůže být hromadným bodem množiny M (protože $M \subseteq N$).