10. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. prosince 2018

10.1 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vhodným způsobem integrace spočítejte daný integrál a načrtněte oblast integrace

(a)
$$\iint_E y^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde $E: \quad y^2 \leq 2x \quad \& \quad y \geq x - 4.$

(b)
$$\iint_E e^{\max\{x^2, y^2\}} \, dx \, dy \ ,$$

kde $E = \langle 0, 1 \rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

(c)
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \, dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

Řešení:
(a) Oblast je vnitřní část paraboly $\frac{y^2}{2} = x$ (obrácené v směru osy x), která je oříznutá šikmo přímkou $y = x - 4$.

Zintegrujeme postupně nejdříve podle x (tj. rozřežeme E vodorovně) a pak podle y. K tomu potřebujeme zjistit rozsah proměnné y (tj. průmět oblasti E na osu y), neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$y^2 = 2x \quad \wedge \quad y = x - 4$$
$$y^2 = 2(y + 4)$$
$$0 = y^2 - 2y - 8 = (y - 4)(y + 2)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \quad -2 \leq y \leq 4 \ \ \& \ \ \frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4$$

Takže máme

$$\iint_E y^2 \, \mathrm{d}S = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} y^2 \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) \, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} y^3 + 4y^2 - \frac{y^4}{2} \, \mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} + 4 \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{10} \right]_{-2}^{4} = 64 + \frac{256}{3} - \frac{512}{5} - 4 + \frac{32}{3} - \frac{16}{5} =$$
$$= 60 + \frac{288}{3} - \frac{528}{5} = 50 + \frac{2}{5} \ .$$

(b) Zjistíme si hodnoty funkce na množině E:

$$e^{\max\{x^2,y^2\}} = \begin{cases} e^{x^2} & \text{pro } 0 \le y \le x \le 1, \\ e^{y^2} & \text{pro } 0 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

Množinu E si tedy rozdělíme na příslušné dvě části (trojúhelníky)

$$E_1: \quad 0 \le y \le x \le 1$$

$$E_2: \quad 0 \le x \le y \le 1$$

a pak máme

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\, dy = \iint_{E_1} e^{x^2}\, dx\, dy + \iint_{E_2} e^{y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx + \int_0^1 y e^{y^2}\, dy =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = e - 1\ .$$

(c) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{x=10y} dy = \int_0^1 y\left(e^{10} - e\right)\, dy = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e\right)\ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $y \le x \le 10y$ a $0 < y$, tak $1 \le \frac{x}{y} \le 10$ a tedy $e^1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^{10}$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje a je konečný.

10.2 (oblast zadaná v polárních souřadnicích)

Křivka (zadaná pomocí polárních souřadnic) je tvaru $\varrho = 1 + \sin\varphi$, $\quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích a určete velikost plochy E, kterou křivka (v kartézských souřadnicích!) ohraničuje.

Řešení:
V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy se nazývá *kardioida.* Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{D=\Phi(U)} 1\, dS = \iint_U r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\sin\varphi} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1+\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\sin\varphi)^2\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + 2\sin\varphi + 1)\ d\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

10.3 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblast E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

Řešení:

V oblast E je ohraničena přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 2 - x$$

Její parametrizace U v polárních souřadnicích je dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \le \varrho \le \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

10.4 (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx$$

(b)

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \arctan\frac{y}{x}\ dy\ dx,$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Jakobián je $\det \Psi' = r$ takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dS = \iint_U r\cos\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r\ dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) = 1\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\ dV = \left(\int_X f(x)\ dx\right)\cdot\left(\int_Y g(y)\ dy\right)$$

pro integrabilní funkce $f: X \to \mathbb{R}$ a $g: Y \to \mathbb{R}$. x

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

což je čtvrtina kruhu, jejíž parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Máme

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \arctan\frac{y}{x}\ dy\ dx = \iint_{E=\Psi(U)} \arctan\frac{y}{x}\ dS = \iint_U r\cdot\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cdot\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int_0^1 r\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\ d\varphi\right) = \frac{\pi^2}{16}\ .$$

10.5 (polární souřadnice)
Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)
$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\; dx,$$

(b)
$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\; dx,$$

(c)
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\; dy.$$

Řešení:
Vzhledem ke tvaru množiny i funkce zde budeme používat transformaci pomocí polárních souřadnic

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x$$
což je trojúhelník, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ (po dosazení do nerovnosti pro E a úpravě, ale hlavně pomocí náčrtku) je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le r \le \tfrac{1}{\cos\varphi}\ .$$

takže máme
$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\; dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x}{x^2+y^2}\; dS = \iint_U \cos\varphi\; dr\; d\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\varphi\; dr\; d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\; d\varphi = \frac{\pi}{4}\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad -2 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2\ .$$

takže máme

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\ dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dS = \iint_U r^2(\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=\cos 2\varphi})\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2\ dr\right)\cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos 2\varphi\ d\varphi\right)}_{=0} = 0\ .$$

(c) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \quad \& \quad y \le x \le \sqrt{4-y^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\ .$$

takže máme

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\ dy = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dS = \iint_U \frac{r}{1+r^2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\ d\varphi\right) = \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_{r=0}^{r=2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ln 5\ .$$

10.6 (cylindrické souřadnice)

Určete těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie pro homogenní kužel s výškou $H > 0$, poloměrem podstavy $R > 0$ a hustotou $\sigma(x, y, z) = 1$.

Řešení:
Kužel

$$E: \quad 0 \le z \le H \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{H}\cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint_E 1\ dV = \int_0^H \Big(\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{R}{H}\cdot z} 1\ dxdy\Big)\ dz = \int_0^H \pi\left(\frac{R}{H}\cdot z\right)^2\ dz = \frac{\pi}{3}R^2 H$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové.

Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_E z\ dV = \frac{1}{m} \int\limits_0^H \Big(\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{H} \cdot z} z\ dxdy \Big)\ dz = \frac{1}{m} \int\limits_0^H \pi \left(\frac{R}{H} \cdot z \right)^2 \cdot z\ dz = \frac{1}{m} \frac{\pi}{4} R^2 H^2 = \frac{3}{4} H\ .$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezu (přesněji na závislostí plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel"s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

Moment setrvačnosti M_3 (vůči 3. ose souřadnic):

Integrujeme čtverec vzdálenosti každého bodu (x, y) tělesa od osy z, tedy funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$. Použijeme tentokrát cylindrické souřadnice

$$\Phi : \begin{array}{ccc} x & = & r \cos \varphi \\ y & = & r \sin \varphi \\ z & = & h \end{array}$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U : \quad 0 \le h \le H \quad \& \quad 0 \le r \le \frac{R}{H} \cdot h \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

$$M_3 = \iiint\limits_{E = \Phi(U)} (x^2 + y^2)\ dV = \iiint\limits_U r^2 \cdot r\ dr\ d\varphi\ dh = \int\limits_0^H \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{R}{H} \cdot h} r^3\ dr\ d\varphi\ dh =$$

$$= \int\limits_0^H \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left(\frac{R}{H} \cdot h \right)^4\ d\varphi\ dh = \left(\int\limits_0^H h^4\ dh \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^4}{4H^4}\ d\varphi \right) = \frac{H^5}{5} \cdot \frac{2\pi R^4}{4H^4} = \frac{\pi}{10} R^4 H\ .$$

10.7 (sférické souřadnice)
Vypočtěte

$$\iiint\limits_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}\ dV,$$

kde $E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

Řešení:
Věta o substituci má analogický tvar a podmínky (pouze "zanedbatelné"množiny nyní zahrnují i plochy, roviny atd.):

$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint\limits_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\ dV.$$

Použijeme *sférické souřadnice*:

$$\Psi : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Psi : \begin{array}{ccc} x & = & (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y & = & (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z & = & r \cos \vartheta \end{array}\ .$$

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_1 : \begin{array}{ccc} \tilde{r} & = & r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} & = & \varphi \\ \tilde{z} & = & r\cos\vartheta \end{array} , \quad \Phi_2 : \begin{array}{ccc} x & = & \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y & = & \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z & = & \tilde{z} \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det\Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta)\cdot r = r^2\sin\vartheta.$$

Zvolíme si parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi\ .$$

Takže můžeme psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}}\ dV = \iiint\limits_{U} \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ dV =$$

$$= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = 2\pi\int_0^1\int_0^\pi \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left[r\frac{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}{2}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi\int_0^1 r\Big(\sqrt{r^2+4r+4}-\sqrt{r^2-4r+4}\Big)\ dr =$$

$$= \pi\int_0^1 r\Big(|r+2|-|r-2|\Big)\ dr = \pi\int_0^1 r\Big(r+2-(2-r)\Big)\ dr = 2\pi\int_0^1 r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi.$$

10.8 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint\limits_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\ dV$$

kde E je oblast mezi sférami se středy v počátku a poloměry 1 a 2.

Řešení:
Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi : \quad \begin{array}{ccc} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 1 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi\ .$$

Pro jakobián máme

$$\det\Psi' = r^2\sin\vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV = \iiint\limits_{U} r\sin\vartheta\cos\varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin\vartheta \ dr \ d\varphi \ d\vartheta =$$

$$= \left(\int\limits_1^2 r^3 e^{r^4} \ dr\right) \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \ d\varphi\right)}_{0} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^2\vartheta \ d\vartheta\right) = 0\ .$$