11. cvičení z Matematické analýzy 2

10. - 14. prosince 2018

11.1 (cylindrické souřadnice)
Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(a)

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx.$$

(b)

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dz\, dy\, dx\ .$$

Řešení:
Cylindrické souřadnice jsou tvaru:

$$\Phi : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Phi : \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det\Phi' = r\ .$$

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \le 2 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \le 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le z \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)\, dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^2 \cdot r \; dV = \int\limits_0^2 \int\limits_0^z \int\limits_0^{2\pi} r^3 \; d\varphi \; dr \; dz = 2\pi \int\limits_0^2 \int\limits_0^z r^3 \;\; dr \; dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^2 z^4 \;\; dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

(b) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le x \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \le 1 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako “čočka”). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

Pak můžeme psát

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \; dz \; dy \; dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \; dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^3 \cdot r \; d\varphi \; dz \; dr = \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{2-r^2} \int\limits_0^{2\pi} r^3 \; d\varphi \; dz \; dr = 2\pi \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{2-r^2} r^3 \; dz \; dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 r^3(1-r^2) \;\; dr = 4\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

11.2 (sférické souřadnice)

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz dy dx,$$

Řešení:

Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -3 \leq x \leq 3 \quad \& \quad -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \quad \& \quad 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}$$

neboli

$$E: \quad |x| \leq 3 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{9-x^2} \quad \& \quad 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}$$

což je prostě jen

$$E: \quad x^2 \leq 9 \quad \& \quad y^2 + x^2 \leq 9 \quad \& \quad z^2 + x^2 + y^2 \leq 9 \quad \& \quad 0 \leq z$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad \& \quad 0 \leq z$$

což je horní polokoule s poloměrem 3 a středem v počátku souřadnic.

Ve sférických souřadnicích

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & (r \sin\vartheta) \cos\varphi \\ y & = & (r \sin\vartheta) \sin\varphi \\ z & = & r \cos\vartheta \end{array}$$

je parametrizací $E = \Psi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \leq r \leq 3 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{2}$$

Pak můžeme psát

$$\int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r\cos\vartheta \cdot r \cdot r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = \int\limits_0^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^4 \cos\vartheta \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= \left(\int\limits_0^3 r^4\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos\vartheta\sin\vartheta}_{\frac{\sin 2\vartheta}{2}}\ d\vartheta\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) = \frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \left[-\frac{\cos 2\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81}{5}\pi.$$

11.3 (sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha_0) \geq \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:

Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & (r \sin\vartheta) \cos\varphi \\ y & = & (r \sin\vartheta) \sin\varphi \\ z & = & r \cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint_{E=\Psi(U)} 1 \; dV = \iiint_U r^2 \sin\vartheta \; dV = \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; dr = 2\pi(1-\cos\alpha_0) \int_0^R r^2 \; dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Psi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint_U r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1-\cos 2\alpha_0}{1-\cos\alpha_0} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha_0).$$

11.4 (křivkový integrál z funkce)

Integrujte funkci $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ podél křivky Γ: $y = \frac{x^2}{2}$ od bodu $A = (1, \frac{1}{2})$ do bodu $B = (0,0)$.

Řešení:

Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_\Gamma f \; ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)|| \; dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky Γ, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \Gamma$.

Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1-t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1+(t-1)^2}.$$

Takže

$$\int_\Gamma f \; ds = \int_0^1 \frac{1-t+\frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1+(1-t)^2}} \cdot \sqrt{1+(t-1)^2} \; dt = \int_0^1 1-t+\frac{(1-t)^4}{4} \; dt = \left[\begin{smallmatrix} u=1-t \\ du=-dt \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= -\int_1^0 u + \frac{u^4}{4} \; du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

11.5 (délka křivky)

Částice se pohybuje tak, že poloha v čase t je určena jako $\varphi(t) = \left(\cos t,\ \sin t,\ \frac{t^2}{2}\right)$. Určete délku dráhy, kterou urazí v časovém intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení:
Křivka leží v plášti válce $x^2 + y^2 = 1$ a je to postupně se roztahující šroubovice. Délka křivky Γ se pak vypočítá jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \int_a^b ||\varphi'(t)||\ dt\ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(-\sin t, \cos t, t\big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} = \sqrt{1+t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} t=\sinh(\alpha) \\ dt=\cosh(\alpha)d\alpha \end{smallmatrix}\right] = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{1+\sinh^2(\alpha)}\cdot\cosh(\alpha)\ d\alpha =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1+\sqrt{1+1^2})} \cosh^2(\alpha)\ d\alpha = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\right)^2 d\alpha = \frac{1}{4}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 2 + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\ d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\Big[e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}\Big]_{\alpha=0}^{\alpha=\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\ .$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce $u = \sqrt{1+t^2}$ je částí hyperboly ($u^2 - t^2 = 1$), je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\ .$$

Jde o rozklad funkce e^α na sudou a lichou funkci, tj. $e^\alpha = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)$. Podobně se pro parametrizaci kružnice $u = \sqrt{1-t^2}$ zase používají goniometrické funkce $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1,$	$\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$
$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \cosh(2\alpha),$	$\cosh'(\alpha) = \sinh(\alpha)$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro $t = \sinh(\alpha)$:

$$\operatorname{arcsinh}(\alpha) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right).$$

(Dostaneme ji z kvadratické rovnice $e^t - 2\alpha - \frac{1}{e^t} = 0$ v proměnné e^t.)

11.6 (křivkový integrál z vektorového pole)

Najděte práci síly $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ vykonané na částici podél křivky Γ s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Její orientace je dána touto parametrizací.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{a}^{b} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{0}^{1} (t^2+t^4, t^4+t, t+t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}\ dt = \int\limits_{0}^{1} 3t^2 + 5t^4 + 6t^5\ dt = \Big[t^3 + t^5 + t^6\Big]_0^1 = 3.$$