12. cvičení z Matematické analýzy 2

17. - 21. prosince 2018

12.1 (délka křivky)
Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi: \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:
Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\ dt \quad \Big(= \int_\Gamma 1\ ds \Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t,\ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u = t \\ 2du = dt \end{smallmatrix} \right] = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)}\ du =$$

$$= \Big\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \Big\} = 4 \int_0^{\pi} \sin u\ du = 8\ .$$

12.2 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_\Gamma (2a - y)\ dx + x\ dy$$

pro oblouk cykloidy Γ dané parametrizací

$$\varphi: \quad x = a(t - \sin t) \ \ \& \ \ y = a(1 - \cos t) \ \ \& \ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a, která se valí bez tření po přímce.).

Řešení:
Máme

$$\varphi'(t) = \Big(a(1-\cos t),\ a\sin t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(2a - y,\ x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} \Big(a(1+\cos t),\ a(t-\sin t)\Big)\cdot \begin{pmatrix} a(1-\cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi} 1-\cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t\ dt = a^2\int\limits_0^{2\pi} t\sin t\ dt = a^2\Big[-t\cos t\Big]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos t\ dt = -2\pi a^2.$$

12.3 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int\limits_\Gamma y\ dx - x\ dy$$

kde Γ je asteroida určená parametrizací

$$\varphi:\quad x = a\cos^3 t\ \ \&\ \ y = a\sin^3 t\ \ \&\ \ 0\le t\le 2\pi$$

s parametrem $a>0$. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

Řešení:
Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t\cdot\sin t,\ 3a\sin^2 t\cdot\cos t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(y,\ -x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} (a\sin^3 t, -a\cos^3 t)\cdot \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t\cdot\sin t \\ 3a\sin^2 t\cdot\cos t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= -3a^2\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t\ (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = -\frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(2t)\ dt = -\frac{3}{4}\pi a^2.$$

12.4 (konzervativní pole, potenciál)
Dokažte, že pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y,\ \ y^2+x,\ \ ze^z)$ je konzervativní a najděte jeho potenciál.

Řešení:

Práce síly $\vec{F}$ v *oblasti* U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "osa x'' nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1 \; d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \mathrm{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0-0, \quad 0-0, \quad 1-1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z \, . \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2 + y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

A jak nám tento postup rozhodne o případné neexistenci potenciálu? Pokud po dosazení průběžného tvaru potenciálu do další rovnice zjistíme, že tato nová rovnice nemá řešení, pak potenciál nemůže existovat. Jak by k něčemu takovému mohlo dojít? Předpokládejme např., že druhá složka pole je trochu jiná, dejme tomu, že je tvaru $F_2 = y^2 - x$. Z první rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = x^2 + y$ opět dostaneme, ze potenciál musí být tvaru $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)$ a když ho nyní dosadíme do druhé rovnice $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = y^2 - x$ (se změněnou složkou F_2) tak dostaneme, že

$$y^2 - x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2 - 2x.$$

Nalevo je funkce závislá pouze na y a z, ale už ne na x, zatímco napravo je funkce závislá také na x. Takovouto rovnici nelze splnit, tedy potenciál v tomto případě neexistuje (bez ohledu na to, jaká je třetí složka F_3 našeho pole).

12.5 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

$$\iint\limits_M yz\ dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$ a $u^2 + v^2 \leq 1$.

Řešení:

Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint_M f \; dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS \; ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

Plochu máme definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U : \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (uv, u+v, u-v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u + v$ a $z = u - v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v+u, v-u) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2+v^2)+4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint_M yz \; dS = \iint_U (u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4} \; dS = \left[\begin{smallmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2+4} \; dr \; d\varphi = \left(\int_0^3 r^3 \sqrt{2r^2+4} \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \; d\varphi \right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u + v$ a $z = u - v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2 - z^2}{4}$ a $1 \geq u^2 + v^2 = \frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \quad y^2 + z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

12.6 (plošný integrál z vektorového pole - tok)

Spočítejte

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientaci danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:

Tok vektorového pole $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dS \ ,$$

kde $\Phi : U \to S$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1 - x^2 - y^2\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -2x\big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(2x, 2y, 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint_U (y, x, 1 - x^2 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint_U 1 + 4xy - (x^2 + y^2) \ dS = \begin{bmatrix} \scriptstyle x = r\cos\varphi \\ \scriptstyle y = r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0 \le r \le 1 \\ \scriptstyle 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2 + r^2 \cos\varphi \sin\varphi) r \ dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r \ dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos\varphi \sin\varphi \ dr d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 (1 - r^2) r \ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \ d\varphi\right) + \left(\int_0^1 r^3 \ dr\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \ d\varphi\right)}_{=0} =$$

$$= \left[-\frac{(1 - r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$