13. cvičení z Matematické analýzy 2

3. ledna 2019

13.1 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x, y) = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky Γ, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka Γ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Podle Greenovy věty pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

13.2 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a Γ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora.

Řešení:

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} \, ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

Plocha M je trojúhelník. Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v kladném smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3,1,1)\ .$$

Dále máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x-3y,\ 2y\big)\ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3-3x-y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 3-3x-y)$$

pomocí množiny

$$U:\quad 0 \le x \le 1\ \ \&\ \ 0 \le y \le 3-3x\ .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1,\quad 0,\quad -3\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0,\quad 1,\quad -1\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(3,1,1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial\Phi}{\partial y} \times \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \Big(\mathrm{rot}(\vec{F})\circ\Phi\Big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\times\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{U} (3x,\ x-3y,\ 2y)\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint\limits_{U} (-10x+y)\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{3(1-x)} y - 10x\ dy\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{9}{2}(1-x)^2 - 30x(1-x)\ dx = \frac{3}{2} - 30\cdot\frac{1}{6} = -\frac{7}{2}\ .$$

13.3 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x, xy, 2xz)$ povrchem krychle $M = \langle 0,1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.

Řešení:
Máme
$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$
a
$$\iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3+3x)\ dx\ dy\ dz = \left(\int\limits_0^1 3 + 3x\ dx\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 1\ dy\ dz\right) = \frac{9}{2}.$$