14. cvičení z Matematické analýzy 2

7. - 11. ledna 2019

14.1 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu v $\mathbb{R}^2$ omezenou cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x.

Řešení:

Plochu E si vymezíme křivkami Γ_1 (cykloida) a Γ_2 (úsečka na ose x) tak, aby tyto křivky tvořily její okraj, který bude orientovaný v souladu s Greenovou větou. Cykloida

$$\Gamma_1 : \quad \varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

má podle zadané parametrizace opačnou orientaci než potřebujeme. Pro úsečku je nejjednodušší si zvolit parametrizaci

$$\Gamma_2 : \quad \psi(t) = (t, 0), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

která je naopak ve směru, který chceme.

Greenovu větu, pro (zatím nespecifikované) vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \Big(F_1(x,y), F_2(x,y)\Big)$, pak použijeme takto:

$$\iint\limits_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \int\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

kde znaménka u křivek odpovídají tomu, jestli daná křivka má nebo nemá orientaci v souladu s Greenovou větou.

Teď už jen zbývá si zvolit vhodné vektorové pole a to tak, aby $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Pak totiž bude

$$\text{obsah}(E) = \iint\limits_E \underbrace{1}_{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}} \, dS = \cdots = -\int\limits_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \, .$$

Takových voleb je mnoho, ale pro nás bude nejlepší nějaká jednoduchá, např. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, tj. $\vec{F} = (0, x)$. Pro takovouto volbu bude i integrál $\int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ nulový, protože $\vec{F}$ je kolmé k ose x, takže při pohybu ve vodorovném směru nekoná práci. Ale stejně si nulovost ještě ověříme i explicitně.

Takže máme

pro cykloidu: $\varphi(t) = (\underbrace{t - \sin t}_{=x(t)}, \ \underbrace{1 - \cos t}_{=y(t)}), \qquad \varphi'(t) = (1 - \cos t, \ \ \sin t)$

pro úsečku: $\psi(t) = (\underbrace{t}_{=x(t)}, \ \underbrace{0}_{=y(t)}), \qquad \psi'(t) = (1, \ \ 0)$

a po dosazení dostaneme

$$\text{obsah}(E) = -\int\limits_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt + \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\psi(t)) \cdot \psi'(t) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} (0, \ \ t - \sin t) \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \, dt + \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{(0, \ \ t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t \cdot (-\sin t) + \sin^2 t \; dt = \underbrace{[t \cos t]_0^{2\pi}}_{=2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \; dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \; dt}_{=\pi} = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi \; .$$

14.2 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int_\Gamma (3y - e^{\sin x}) \, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, dy$$

kde Γ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení:

Naše oblast M je kruh o poloměru 3

$$M : \quad x^2 + y^2 \leq 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x, y) = \left(3y - e^{\sin x}, \; 7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) \; .$$

Orientace křivky Γ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int_{\Gamma = \partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \; dS = \iint_M (7 - 3) \; dS = \iint_M 4 \; dS = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi \; .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

14.3 (Stokesova věta)

Spočítejte práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (x^x + z^2)\vec{i} + (y^y + x^2)\vec{j} + (z^z + y^2)\vec{k}$ vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka Γ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupnosti bodů $(2, 0, 0) \to (0, 0, 2) \to (0, 2, 0)$).

Řešení:

Jak je vidět z tvaru vektorového pole, integrál odpovídající práci $\vec{F}$ síly podél uvedeného okraje Γ bychom přímým způsobem počítali asi těžko. Pomůžeme si proto Stokesovou větou, která integrál převede na tok $\mathrm{rot}(\vec{F})$ plochou

$$M : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x, y, z \geq 0 \; .$$

Tu musíme orientovat tak, aby její orientace byla v souladu se zvolenou orientací křivky Γ. To lze uvidět např. z náčrtku a správná orientace plochy M je pak směrem *do počátku souřadnic* (tedy kdyby M byla celá sféra, byla by to ta orientace dovnitř).

Stokesova věta pak říká, že pro plochu M a okraj $\Gamma(=\partial M)$, co mají orientace v souladu, je

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

kde pro pole $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ je

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

což v našem případě je

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^x+z^2 & y^y+x^2 & z^z+y^2 \end{vmatrix} = (2y-0,\ 2z-0,\ 2x-0)\ .$$

Dále budeme potřebovat ještě plochu M zparametrizovat. K tomu bude nejvhodnější použít sférických souřadnic (pro $r=2$). Parametrizace pak bude

$$\Phi:\quad \begin{array}{rcl} x &=& 2\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &=& 2\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &=& 2\cos\vartheta \end{array}$$

pro

$$U:\quad 0\le\varphi\le\tfrac{\pi}{2}\quad \&\quad 0\le\vartheta\le\tfrac{\pi}{2}\ .$$

Pro výpočet plošného integrálu budeme potřebovat ještě vektorový součin

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin\vartheta\sin\varphi & 2\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ 2\cos\vartheta\cos\varphi & 2\cos\vartheta\sin\varphi & -2\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= (-4\sin^2\vartheta\cos\varphi,\quad -4\sin^2\vartheta\sin\varphi,\quad -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

který má zjevně tu správnou orientaci odpovídající orientaci plochy (tj. směrem *do počátku* souřadnic). Kdyby neměl, vzali bychom ho s opačným znaménkem. Proto teď můžeme psát

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U}\Big(\mathrm{rot}(\vec{F})\circ\Phi\Big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \iint\limits_{U}(4\sin\vartheta\sin\varphi,\quad 4\cos\vartheta,\quad 4\sin\vartheta\cos\varphi)\cdot\begin{pmatrix} -4\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -4\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= -16\iint\limits_{U}\sin^3\vartheta(\sin\varphi\cos\varphi)+(\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\sin\varphi+(\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cos\varphi\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \left(-16\int\limits_0^{\pi/2}\underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}\ d\vartheta\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\right)+\left(-16\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)\ d\varphi\right)=$$

$$= \Big[-16(-\cos\vartheta+\tfrac{1}{3}\cos^3\vartheta)\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\Big]_0^{\pi/2}+\Big[-\tfrac{16}{3}\sin^3\vartheta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[-\cos\varphi+\sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{16}{3}\right)\cdot 2 = -\frac{16}{3}\ .$$

14.4 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a M je polosféra $x^2+y^2+z^2=1$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

Máme

$$M: \quad x^2+y^2+z^2=1 \ \ \& \ \ z \geq 0$$

a

$$\partial M: \ \ x^2+y^2=1 \quad \& \quad z=0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru"a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \, d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\alpha \ d\alpha = \pi.$$

14.5 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ a sférou $x^2+y^2+z^2=1$ s vnější orientací.

Řešení:

Máme

$$M: \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

a

$$\partial M: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \ .$$

Orientace okraje ∂M je dána vnější normálou.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2+y^2+z^2)$$

a Gaussova věta nám dává

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \iiint\limits_M 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ dV = \begin{bmatrix} {\scriptstyle x=r\sin\vartheta\cos\varphi} \\ {\scriptstyle y=r\sin\vartheta\sin\varphi} \\ {\scriptstyle z=r\cos\vartheta} \\ {\scriptstyle (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle} \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} 3r^2 \cdot |r^2\sin\vartheta| \ dr \ d\varphi \ d\vartheta = \left(\int\limits_0^1 3r^4 \ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1 \ d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \ d\vartheta\right) = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

14.6 (Gaussova věta)

Určete

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde S je hranice čtyřstěnu

$$M: \quad x+y+z \leq 1 \;\; \& \;\; x,y,z \geq 0$$

orientovaná vnější normálou a vektorové pole je

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(xy, yz, xz\big) \ .$$

Řešení:
Použijeme Gaussovu větu. Orientace plochy S je v souladu s Gaussovou větou. Spočítáme si divergenci

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x \ .$$

Čtyřstěn M si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1-x \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1-x-y$$

Máme tedy

$$\iint\limits_{S=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_M \mathrm{div}(\vec{F})\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} x+y+z\ dz\ dy\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left[(x+y) + \frac{1}{2}(1-x-y)\right](1-x-y)\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} 1-(x+y)^2\ dy\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}$$