2. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. října 2018

Příklady **1.5**, **1.6**.

2.1 Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 \leq 3 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů.

(a) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost vyjádřit jako množinu

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 4$$

což je kruh i s okrajem o poloměru 2 a středem $a_0 = (-1, 0)$. Podobně druhá nerovnost znamená množinu

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

tedy kruh i s okrajem o poloměru 2 a středem $a_0 = (2, 0)$.

- ***Vnitřek*** M:
$$M^\circ : \quad (x+1)^2 + y^2 < 4 \quad \wedge \quad (x-2)^2 + y^2 < 4.$$
- ***Hranice*** M: Hranice jsou dva oblouky kružnice:
$$\partial M : \Big((x+1)^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4\Big) \vee \Big((x+1)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 = 4\Big)$$
- ***Uzávěr*** M: Množina M je uzavřená (je průnikem dvou uzavřených množin), tedy $\overline{M} = M$.
$$\overline{M} : \quad (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad (x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

(b) Zadání si opět upravíme na přehlednější tvar doplněním na čtverec. První nerovnost

$$(x-1)^2 - y^2 > 1$$

jsou dvě otevřené oblasti vymezené hyperbolou se středem v $(1, 0)$ a druhá nerovnost

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

je kruh i s okrajem o poloměru 2 a středem v $(2, 0)$.

- ***Vnitřek*** M:
$$M^\circ : \ (x-1)^2 - y^2 > 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 < 4.$$
- ***Hranice*** M: Hranice je jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly. Musíme si ale dát pozor na zápis, protože průnikem hyperboly a kružnice je i bod $(0, 0)$, který na hranici naší množiny M není.
$$\partial M : \Big((x-1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0)\Big) \ \vee$$
$$\vee \ \Big((x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0)\Big)$$
- ***Uzávěr*** M: Opět si musíme dát pozor na zápis, protože bod $(0, 0)$ v uzávěru naší množiny M není.
$$\overline{M} : \quad (x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0) \ .$$

2.2 Poznámka č. 1: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:

Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je otevřená

  (množina A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$)

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená

  (množina A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow$ doplněk A je otevřená množina).

Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozích příkladech získali tak, že jsme z neostrých nerovnosti udělali ostré (z ostrých neostré, resp.).

POZOR! Pro množinu M tímhle způsobem ale obecně nemusíme získat pokaždé vnitřek M°, ale jen nějakou jeho (obecně menší) otevřenou podmnožinu $N \subseteq M^\circ$. Podobně obecně nemusíme získat pokaždé uzávěr $\overline{M}$, ale jen nějakou jeho (obecně větší) uzavřenou (nad)množinu $K \supseteq \overline{M}$.

Rovnost nemusí obecně nastat!

Příklad: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ -(x+1)^2, & x < -1 \ . \end{cases}$$

Pak pro

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} = (0, +\infty)$$

a

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} = \langle -1, +\infty)$$

máme

$$\overline{A} = \langle 0, +\infty) \subsetneqq B$$
$$B^\circ = (-1, +\infty) \supsetneqq A$$

Poznámka č. 2: Všimněme si, že problém vzniká v bodech, kde je derivace nulová. Pokud se tomuto vyhneme, pak už můžeme vnitřky i uzávěry vytvářet změnou nerovností:

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Pokud pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, je $f'(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \neq (0, \ldots, 0)$, pak

- pro $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je

$$\overline{A} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$$

- a pro $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je

$$B^\circ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}.$$

2.3 Zjistěte, zda existuje limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ je
$$D(f): \quad x \neq y \ .$$
Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pak máme
$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k} \ .$$
Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

2.4 Najděte hodnotu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ c, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$
byla spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$.

Řešení:
Podle zadání máme tedy najít $c \in \mathbb{R}$ tak, aby
$$c = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} \ .$$
Abychom si procvičili význam a definici limity, budeme podle ní postupovat. Má tedy platit, že
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall a \in D(f) \quad 0 < \|a - a_0\| < \delta \ \Rightarrow \ |f(a) - c| < \varepsilon \ .$$
Nejdříve najdeme, jakou c musí mít hodnotu. Pokud limita existuje, pak musí být nabyta např. při přiblížení k bodu $(0,0)$ po ose x (tj. při $y = 0$):
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$
Tedy jediný kandidát je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. Použijeme přitom tyto odhady:
$$|x|, |y| \leq \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\|(x,y)-(0,0)\|} \leq |x| + |y|$$
Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme
$$\big|f(x,y) - 0\big| = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{|x|+|y|} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)-(0,0)\|$$
pro $\varepsilon > 0$ teď stačí vzít $\delta := \varepsilon$ a pro $a_0 = (0,0)$ a $a = (x,y)$ takové, že $0 < \|a - a_0\| < \delta$ tudíž máme
$$|f(a) - 0| \leq \cdots \leq \|a - a_0\| < \delta = \varepsilon \ .$$
Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Obecnější způsob: Zřejmě $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ právě když $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|f(x,y)\right| = 0$. Opět použijeme stejný odhad:

$$0 \leq \left|f(x,y)\right| \leq \cdots \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

a větu o limitě sevřené funkce

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|f(x,y)\right| \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \;= 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

2.5 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ ve vnitřním bodě $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f)$ je definována jako

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

tedy funkci f stačí "obyčejně"derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu. V bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ tak můžeme standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0,0)$ musíme použít definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0\ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0\ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0,0)$. Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim\limits_{a\to a_0} \frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

2.6 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = x^2y + \ln(x+2y)$,

(b) $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Řešení:

(a) Definiční obor $D(f) : x + 2y > 0$ je otevřená množina.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{2}{x+2y}$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)$.

(b) Funkci si vhodně přepíšeme jako $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}}$. Definiční obor $D(f)$: $xy > 0$ je opět otevřená množina. Protože funkce je symetrická v proměnných x a y, stačí spočítat jen jednu z derivací a druhou pak příslušně přepsat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left[\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} + \ln(xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y^2 + x^2(1+\ln(xy))}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 + y^2(1+\ln(xy))}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

Obě parciální derivace opět existují na $D(f)$.

2.7 Derivace (totální difereciál) funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $f'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)-f'(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0\ .$$

Také to můžeme říct tak, že existuje $\varepsilon > 0$ a funkce ω definovaná na ε-okolí počátku souřadnic $\vec{0}$ taková, že

$$\lim_{\vec{u}\to\vec{0}} \omega(\vec{u}) = 0$$

a platí, že

$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\| \cdot \omega(\vec{h})$$

pro každý vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

Poznámka č. 3:

- Pokud existuje derivace $f'(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}]$. Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$.

  POZOR: Opačná implikace obecně neplatí! Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a jsou spojité na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $f'(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

2.8 Určete diferenciál (tj. derivaci) funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$. V tomto bodě určete i derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Je tento směr něčím význačný?

Určete také směr, ve kterém má funkce v bodě $a_0 = (1, 1)$ největší pokles (tj. nejmenší růst) a směry, ve kterých má funkce v bodě $a_0 = (1, 1)$ nulový růst.

Řešení:
Podle předchozí poznámky ze spojitosti parciálních derivací (které vzápětí spočítáme) zjistíme, že derivace v bodě $a_0 = (1, 1)$ skutečně existuje.

Pro $a_0 = (1, 1)$ tedy máme

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y}{1 + (xy)^2}, \frac{x}{1 + (xy)^2}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) .$$

Dále je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Směr $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ je směrem gradientu v daném bodě

$$\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

(tj. $\vec{u} = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(a_0)$ pro nějaké $\lambda > 0$) tedy směrem největšího růstu funkce f v daném bodě.

Protože navíc platí, že $\|\vec{u}\| = 1$, je hodnota $\frac{\sqrt{2}}{2}$ největší hodnotou, jaké může nabýt výraz $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{h}]$ pro vektor $\vec{h}$ takový, že $\|\vec{h}\| = 1$. To je okamžitý důsledek Cauchy-Schwartzovy nerovnosti, která říká, že pro každé dva vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

a rovnost zde nastává pouze pokud jsou vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ lineárně závislé.

Při našem zadání tak skutečně dostáváme, že pokud $\|\vec{h}\| = 1$, pak

$$\left|\tfrac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0)\right| = \left|\operatorname{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}\right| \leq \|\operatorname{grad} f(a_0)\| \cdot \|\vec{h}\| = \|\operatorname{grad} f(a_0)\| = \tfrac{\sqrt{2}}{2} .$$

Směr největšího poklesu $\vec{v}$ je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{v} = -\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směr nulového růstu $\vec{w}$ je takový, že

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(a_0) = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{w} \ .$$

Tedy jde o směry kolmé ke gradientu (tudíž kolmé k vektoru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$) neboli dva navzájem opačné vektory

$$\vec{w}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ \text{ a } \ \vec{w}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ .$$