3. cvičení z Matematické analýzy 2

15. - 19. října 2018

Příklady **2.3**, **2.4**, **2.5**, **2.6**.

3.1 Zjistěte, zda existuje limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pak máme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{(kx)^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+k}{k^2x+1} = k \ .$$

Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

3.2 Pro následující funkce f najděte parciální derivace a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$,

(b) $f(x,y,z) = 3x^2y + 4xyz + 8xy^2z$,

(c) $f(x,y,z) = \ln(z^2 - x^2 - y^2)$.

Řešení:
(a) Definiční obor $D(f) : y \geq -x^2$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : y > -x^2$. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \ .$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.

(b) Definiční obor je zřejmě celé $\mathbb{R}^3$ a protože jde o polynom, parciální derivace existují všude v $\mathbb{R}^3$. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 4yz + 8y^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4xz + 16xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4xy + 8xy^2 \ .$$

(c) Definiční obor $D(f) : |z| > \sqrt{x^2 - y^2}$ je otevřená množina, která představuje vnitřek dvou kuželů postavených vrcholy proti sobě. Funkci si vhodně přepíšeme jako $f(x, y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}}$. Definiční obor $D(f) : xy > 0$ je opět otevřená množina. Protože funkce je symetrická v proměnných x a y, stačí spočítat jen jednu z derivaci a druhou pak příslušně přepsat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{z^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{z^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{z^2 - x^2 - y^2} .$$

Všechny parciální derivace opět existují na $D(f)$.

3.3 Najděte derivaci funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

v bodě $a_0 = (1, 1)$.

Určete všechny směry $\vec{u}$, ve kterých je růst funkce f v bodě $(1, 1)$ největší (nejmenší, nulový). Tedy takové směry $\vec{u}$, že $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ nabývá největší (nejmenší, nulové) hodnoty.

Řešení:
Definiční obor je $D(f) : y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje.

Pro $a_0 = (1, 1)$ je

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1 + (\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1 + (\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) .$$

Směr největšího růstu funkce f v a_0 je směrem gradientu $\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ tedy $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směr nejmenšího růstu $\vec{v}$ je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{v} = -\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směry nulového růstu jsou směry kolmé ke gradientu tedy $\vec{w}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\vec{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.4 Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^3}}} .$$

Řešení:
Budeme uvažovat funkci

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{z^3}}} = x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{4}}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x, y, z > 0$) a najdeme její linearizaci g v bodě $a_0 = (1, 1, 1)$, tedy funkci

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] \ .$$

Hodnotu v bodě $a_1 = (1.03, 0.98, 1.05)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \approx g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.03, -0.02, 0.05)$.

Máme tedy

$$f'(a_0) = \left(2xy^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\tfrac{1}{3}x^2y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\tfrac{1}{4}x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{5}{4}}\right)(a_0) = \left(2, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}\right)$$

takže

$$f(a_1) \approx g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + \left(2, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.02 \\ 0.05 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.06 + \tfrac{0.02}{3} - \tfrac{0.05}{4} = 1 + \tfrac{0.65}{12} = 1.054166667\ldots$$

(Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 9 desetinných míst je $f(a_1) \doteq 1.055119783$.)

3.5 Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $(2, 2, ?)$.

Řešení:
Označme si $a_0 = (x_0, y_0) = (2, 2)$. Poslední souřadnice bodu na grafu funkce, kde hledáme tečnou rovinu, je rovna $z_0 = f(a_0) = 4$. Jde tedy o bod $(2, 2, 4)$.

Tečná rovina ke grafu f v bodě a_0 je grafem linearizace funkce v tomto bodě, tj. funkce

$$g(a) = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] \ .$$

Tedy má rovnici

$$z = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) \ .$$

Teď už jen dosadíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \Big(y + \cos(x - y)\Big)_{|(2,2)} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_0) = \Big(x - \cos(x - y)\Big)_{|(2,2)} = 1$$

tedy tečná rovina má rovnici

$$z = 4 + 3 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 2)$$

neboli

$$3x + y - z = 4.$$

3.6 Nalezněte úhel, který svírají grafy funkcí $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a $g(x, y) = \sin(xy)$ v bodě $(1, 0, ?)$.

Řešení:
Nejdříve si ověříme, že grafy funkci se skutečně protínají v bodě $a_0 = (1, 0)$:

$$f(a_0) = 0 = g(a_0)$$

čímž dostaneme i třetí souřadnici bodu. Jde tedy o bod $(1, 0, 0)$.

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami. Ten zase můžeme spočítat pomocí normálových vektorů těchto rovin jako

$$\cos\alpha = \tfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ ,$$

kde $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ jsou jednotlivé normálové vektory a absolutní hodnotu ze skalárního součinu používáme proto, že z navzájem doplňkových úhlů, které svírají roviny, si chceme vzít ten menší.

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce f pro bod $a_0 = (x_0, y_0)$ je

$$z = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0)$$

neboli

$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0),\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0),\ -1 \right) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

a její normálový vektor je tak

$$\vec{n} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0),\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0),\ -1 \right)$$

Normálové vektory tečných rovin funkcí f a g pro bod $a_0 = (1, 0)$ tak jsou

$$\vec{n}_1 = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0),\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0),\ -1 \right) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, -1 \right)(a_0) = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \left(\tfrac{\partial g}{\partial x}(a_0),\ \tfrac{\partial g}{\partial y}(a_0),\ -1 \right) = \left(y\cos(xy), x\cos(xy), -1 \right)(a_0) = (0, 1, -1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je tudíž určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.