4. cvičení z Matematické analýzy 2

22. - 26. října 2018

4.1 Pro funkci $f(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz$ určete v bodě $a_0 = (1, 1, 2)$ derivaci ve směru $\vec{u}$, který je určen tím, že svírá s (kladnými směry) souřadných os postupně úhly 60°, 45° a 60°.

[Výsledky: směr $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$; $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = 5$.]

4.2 Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

(a) $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right)$,

(b) $(1.04)^{2.02}$.

[Výsledky: (a) 0.005; (b) 1.08 .]

4.3 Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y) = xy^2$ v bodě $(2, 1, ?)$.

[Výsledky: bod $(2, 1, 2)$, tečná rovina $x + 4y - z = 4$.]

4.4 Předpokládejme, že výška terénu v $\mathbb{R}^3$ je popsána grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x^2+2y^2+1}$. V bodě $(2, 1, ?)$ pustíme míč.

(a) Určete vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$, jehož směrem se bude míč kutálet, a projekci $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tohoto vektoru do základny, neboli do roviny $z = 0$. (Vektor $\vec{U}$ je určen až na kladný násobek).

(b) Určete úhel, který svírá tečná rovina v uvedeném bodě s rovinou $z = 0$.

Řešení:

(a) Míč se z bodu $A = (2, 1, \frac{1}{7})$ bude kutálet ve směru $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ největšího spádu funkce, tj. vektor $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ má směr opačný ke gradientu

$$\mathrm{grad} f(a) = \left(-\frac{2x}{(x^2+2y^2+1)^2}, -\frac{4y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)_{|a=(2,1)} = \left(-\frac{4}{49}, -\frac{4}{49}\right)$$

tedy (pro jednoduchost) ve směru určenému vektorem $\vec{u} = (1, 1)$. V prostoru $\mathbb{R}^3$ pak třetí souřadnice je určena jako $u_3 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1) = \mathrm{grad} f(a)[\vec{u}] = -\frac{8}{49}$, tedy $\vec{U} = \left(1, 1, -\frac{8}{49}\right)$.

(b) Úhel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, který svírá tečná rovina v bodě $A = \left(2, 1, \frac{1}{7}\right)$ se základnou $z = 0$, je určen jako $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(a)$, kde $\vec{v_1} = \frac{\mathrm{grad} f(a)}{\|\mathrm{grad} f(a)\|}$. Neboli $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(a) = \mathrm{grad} f(a)[\vec{v_1}] = \|\mathrm{grad} f(a)\| = \frac{4\sqrt{2}}{49}$ a

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{4\sqrt{2}}{49}\right) .$$

4.5 Nalezněte úhel, který svírají grafy funkcí $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a $g(x, y) = e^{xy} - 1$ v bodě $(1, 0, ?)$.

Řešení:
Bod je $(1,0,0)$. Normálové vektory tečných rovin jsou

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, -1\right)_{|(1,0)} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \left(ye^{xy}, xe^{xy}, -1\right)_{|(1,0)} = (0,1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory jako

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

4.6 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M: \; x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho: \; 4x + 2y + z = 3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$:

Věta: Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : G \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in G \mid \Phi(a) = 0\} .$$

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná plocha a je to vrstevnice funkce Φ. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

V našem případě je $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\mathrm{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$. Takže $\mathrm{grad}\Phi(a) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je právě $\mathrm{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4,2,1)$, právě když $(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \mathrm{grad}\Phi(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4,2,1)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4,1,1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

4.7 Nalezněte úhel, který svírají plochy $M : x^2 + y^2 + z^2 = 8$ a $N : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$ v bodě $(2, 0, 2)$.

Řešení:
Gradienty funkcí

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 6 \ ,$$

zadávajících implicitně definované plochy M a N, mají v bodě $A = (2, 0, 2)$ hodnoty

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = (2x, 2y, 2z)_{|A} = (4, 0, 4)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\Big)_{|A} = (2, -4, -2) \ .$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4.8 Transformujte výraz

(a) $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$ pomocí polárních souřadnic.

(b) $\frac{1-x^2}{y}\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí proměnných s a t takových, že $x = \frac{t}{s}$ a $y = t + s$.

Řešení:

Vysvětlení: Co to znamená vyjádřit nějaký výraz (případně rovnici) v jiných souřadnicích? Představme si to tak, že v $\mathbb{R}^n$ "žije" funkce f (tj. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Prostor $\mathbb{R}^n$ (nebo jeho část) můžeme ale popisovat také pomocí jiných (křivočarých) souřadnic $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je vhodná množina. Je to podobné, jako když nějaké území na Zemi zachycujeme na různých mapách. A stejně jako nějaká oblast na Zemi vypadá na různých mapách vždy trochu jinak, stejně tak se funkce f vyjádřená pomocí souřadnicového popisu Φ bude také pokaždé jevit jinak (půjde totiž o funkci $f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$).

Pokud např. v případě (a) funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

přiřadíme funkci

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(popsanou kartézskými souřadnicemi), pak chceme vědět, jak bude vypadat odpovídající přiřazení v polárních souřadnicích pomocí transformace Φ, kdy funkci

$$F := f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$$

přiřazujeme funkci

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \Phi : G \to \mathbb{R} \ .$$

Posledně zmíněnou funkci ovšem chceme vyjádřit pomocí derivací funkce F podle nových souřadnic. Jak je vidět, i přes složení funkce f se zobrazením Φ, jde vlastně pořád o tentýž "objekt", tj. tutéž "funkci" na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Poznámka: Transformace souřadnic je bijektivní zobrazení. Pro diferencovatelnou transformaci, pak požadujeme, aby definiční obor i obor hodnot byly obě otevřené množiny a inverzní zobrazení bylo také diferencovatelné.

(a) Máme polární souřadnice

$$\begin{aligned} \Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \varphi) \quad &\mapsto \quad (x, y) \end{aligned}$$

ve formě

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\ .$$

Není těžké zjistit, že se jedná skutečně o bijekci (tj. Φ je prosté a surjektivní) a inverzní zobrazení je také diferencovatelné. Definiční obor transformace Φ si můžeme následně vzít i jiný např. $(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$ abychom pak pokryli další část $\mathbb{R}^2$, kterou jsme museli vynechat při první volbě definičního oboru transformace. Ovšem bod $(x,y)=(0,0)$ budeme muset v oboru hodnot vynechávat vždycky, protože tam by transformace nebyla bijektivní.

Nyní potřebujeme vyjádřit hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pomocí hodnot a $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)$ a $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi)$, kde $(x,y)=\Phi(r,\varphi)$ a $F(r,\varphi)=f(x,y)$.

Vezmeme si tedy rovnost

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

a použijeme na ní $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial r}$ čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice nebo analogicky vynásobením rovnic tak, abychom získali výraz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

(b) Budeme postupovat stejně jako v příkladu (a). Položíme $F = f\circ\Phi$ pro $\Phi(s,t)=(x,y)$ a tedy

$$F(s,t) = f\big(x(s,t),\ y(s,t)\big)$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

takže máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{s^2} & 1 \\ \\ \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s^2}{t+s} & \frac{s^2}{t+s} \\ \\ \frac{s}{t+s} & \frac{t}{t+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Po dosazení (a vyjádření x a y pomocí s a t) dostáváme

$$\frac{1-x^2}{y}\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{t}{s}\right)^2}{t+s}\left(-\frac{s^2}{t+s}\ \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{s^2}{t+s}\ \frac{\partial F}{\partial t}\right) + 2\left(\frac{s}{t+s}\ \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{t}{t+s}\ \frac{\partial F}{\partial t}\right) =$$

$$= \left(\frac{t-s}{t+s} + 2\frac{s}{t+s}\right)\ \frac{\partial F}{\partial s} + \left(\frac{s-t}{t+s} + 2\frac{t}{t+s}\right)\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\ .$$

Poznámka: Měli bychom ještě zjistit s jakým zobrazením Φ jsme vlastně pracovali, tj. najít definiční obor a obor hodnot tak, aby zobrazení bylo bijektivní atd.:

Definiční obor se určitě musí vyhnout přímce $s = 0$. Dále zjistíme, které body (x, y) můžeme jednoznačně popsat pomocí (s, t), neboli ze vztahu $x = \frac{t}{s}$ a $y = t + s$ určíme s a t. Máme

$$sx = t \quad \text{a} \quad y = sx + s = s(x+1)$$

tedy

$$s = \frac{y}{x+1} \quad \text{a} \quad t = \frac{xy}{x+1}$$

pokud $x \neq -1$. Dale pro $t \neq 0$ zřejmě je $x = -1 \;\Leftrightarrow\; t = -s \;\Leftrightarrow\; y = t + s = 0$. Tudíž vzory bodu $(x, y) = (-1, 0)$ jsou body $(s, -s)$ pro $0 \neq s \in \mathbb{R}$.

Jestliže si teď zvolíme definiční obor zobrazení Φ jako

$$D_\Phi = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \neq 0 \ \wedge\ s + t \neq 0\}$$

pak jeho bijektivním obrazem bude obor hodnot

$$H_\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -1 \wedge y \neq 0\}$$

Obě tyto množiny jsou otevřené (a navíc se obě rozpadají na 4 disjunktní souvislé otevřené množiny). Zobrazení Φ je tedy určené svým předpisem a tím odkud a kam jde

$$\Phi : D_\Phi \to H_\Phi\ .$$

Co se týče diferencovatelnosti zobrazení Φ i jeho inverze, tu už jsme vlastně zkontrolovali výše a je vidět, že právě ty výrazy ve jmenovatelích, které by nám vadily, jsme odstranili při volbě definičního oboru Φ.