5. cvičení z Matematické analýzy 2

29. října - 2. listopadu 2018

Příklady **4.6**, **4.7**, **4.8**(a).

5.1 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu

$$M: \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

tak, aby její průnik buď s množinou

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}$$

nebo s množinou

$$H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \leq 0\}$$

byl rovnostranný trojúhelník.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$:

Věta: Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : G \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in G \mid \Phi(a) = 0\} \ .$$

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\operatorname{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná plocha a je to vrstevnice funkce Φ. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\operatorname{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Rovina, jejíž průnik s H_1 nebo H_2 je rovnostranný trojúhelník, má normálový vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

V našem případě je $\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\operatorname{grad}\Phi(a) = \left(\frac{2x}{25}, \frac{2y}{16}, \frac{2z}{9}\right)$. Takže $\operatorname{grad}\Phi(a) = \vec{0}$ právě když $a = (0, 0, 0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je právě $\operatorname{grad}\Phi(a_0)$. Tečná rovina bude mít za normálový vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$, právě když

$$\left(\frac{2x_0}{25}, \frac{2y_0}{16}, \frac{2z_0}{9}\right) = \operatorname{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n} = \lambda \cdot (1, 1, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy $(x_0, y_0, z_0) = \frac{\lambda}{2}(25, 16, 9)$. Současně má také platit, že $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} + \frac{z_0^2}{9} = 1$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(\frac{25}{\sqrt{25}}, \frac{16}{\sqrt{25}}, \frac{9}{\sqrt{25}}\right) \in M$ a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(-\frac{25}{\sqrt{25}}, -\frac{16}{\sqrt{25}}, -\frac{9}{\sqrt{25}}\right) \in M$.

5.2 Transformujte výraz

(a) $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$ pomocí polárních souřadnic.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí proměnných s a t takových, že $s = \frac{y}{x}$ a $t = xy$, kde $x, y > 0$.

[Výsledky: (a) $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2$, kde $F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$; (b) $\sqrt{st}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}$, kde $F(\frac{y}{x}, xy) = f(x,y)$.]

5.3 Najděte Taylorův polynom 2. řádu pro funkci $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ v okolí bodu $a_0 = (0,0)$.

Řešení:
Taylorův polynom 2. řádu, který aproximuje funkci f v bodě a_0, je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\mathbf{h}] + \frac{1}{2!}f''(a_0)[\mathbf{h},\mathbf{h}]$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Máme

$$f'(a_0) = \left(e^x \ln(1+y),\ \frac{e^x}{1+y}\right)_{|a_0} = (0,1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} e^x \ln(1+y) & \frac{e^x}{1+y} \\ \frac{e^x}{1+y} & -\frac{e^x}{(1+y)^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 0 + (0,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$
$$= h_2 + h_1 h_2 - \frac{1}{2}h_2^2.$$

5.4 Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení:
Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1,1)$. V daných (stacionárních) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1,h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\mathbf{h},\mathbf{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (1,1)$ je $f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3$).

5.5 Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$.

Řešení:
Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y,z) = \left(3x^2 - 3y,\ 2y - 3x - 2,\ z + 2\right)$$

Tedy $f' = 0$ právě když

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ 2y &= 3x + 2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

což je právě když $(x,y,z) = (2,4,-2)$ nebo $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$. V daných (stacionárních) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $(x,y,z) = (2,4,-2)$ je

$$f''(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

Pro $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$ je

$$f''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x,0,0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.