6. cvičení z Matematické analýzy 2

5. - 9. listopadu 2018

Příklad **5.5**.

6.1 (Taylorův polynom)

Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

(i) funkci $f(x,y) = e^x \sin y$ v okolí bodu $a_0 = (0,0)$.

(ii) funkci $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ v okolí bodu $a_0 = (2,1)$.

Řešení:

Taylorův polynom řádu 2, který aproximuje funkci f v bodě a_0, je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\mathbf{h}] + \frac{1}{2!} f''(a_0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}]$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Máme

$$f'(a_0) = (e^x \sin y,\ e^x \cos y)_{|a_0} = (0,1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 0 + (0,1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= h_2 + h_1 h_2.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = \left(-\frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2} \right)_{|a_0} = (-1, 1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-y)^3} & -\frac{2}{(x-y)^3} \\ -\frac{2}{(x-y)^3} & \frac{2}{(x-y)^3} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 1 + (-1,1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - h_1 + h_2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2.$$

6.2 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

(ii) $f(x, y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x, y) = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'(x, y) = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0, 0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = -4h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM. Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená (lze vzít např. zúžení $f(x, 0) = x^3 + 6$).

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x, y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $f'(x, y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0, 0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 12 \cdot h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$f''\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivací negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x, 0) = -x^3 + 2$.

6.3 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x,y,z > 0$.

Řešení:
Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $f'(x,y,z) = 0$ právě když $y^2 = 4x^2$ a $y^3 = 2xz^2$ a $y = z^3$. Řešení pro $x,y,z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$ je

$$f''\left(\frac{1}{2},1,1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

6.4 (vázané extrémy)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$.

Řešení:
Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\ \&\ \Phi'(a) \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \ldots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^2$ a $\Phi(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Protože

$$\Phi'(x,y) = \Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

tak $\Phi'(x,y)$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'(x,y)=0$) právě když $(x,y)=(0,0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y)=0$ a $\Phi'(x,y)=0$. Takže v každém bodě množiny

$$M: \quad 3x^2+5xy+3y^2=1$$

je $\Phi'(x,y)$ regulární. Pro bod $a=(x,y)\in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že

$$(1,-1)=f'(a)=\lambda\cdot\Phi'(a)=\lambda\Big(6x+5y,5x+6y\Big)$$

a

$$3x^2+5xy+3y^2=1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x=-y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1,-1), \qquad (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1)=5, \qquad f(-1,1)=1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M=\Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

$$1=3x^2+5xy+3y^2=3\left(x+\frac{5}{6}y\right)^2+\frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma $Q(x,y)=3x^2+5xy+3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1,-1)$ a $(-1,1)$.

6.5 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y)=3xy$ na množině

$$M: \quad x^2+y^2\le 2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:

Množina M je kruh o poloměru 2. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2+y^2<2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2+y^2=2\ .$$

Extrém na M°:

$$f'=\big(3y,\ 3x\big)=(0,0)$$

nastává právě když $(x,y)=(0,0)$. Máme tak podezřelý bod $(x,y)=(0,0)$ s hodnotou $f(0,0)=0$.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$\pm\,(1, -1)\,, \qquad \pm\,(1, 1)\,,$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1, 1\big) = f\big(1, -1\big) = -3, \qquad f\big(1, 1\big) = f\big(-1, -1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\pm\,(1, 1)$ a minima v bodech $\pm\,(1, -1)$.

6.6 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině

$$M: \quad x \geq 0 \ \ \& \ \ y \geq 0 \ \ \& \quad x + y \leq 6\ .$$

Řešení:

Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(6, 0)$ a $(0, 6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x > 0 \ \ \& \ \ y > 0 \ \ \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq y \leq 6) \ \ \vee \\ (x + y = 6 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hrany trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníku).

Extrém na M°:

$$f' = \big(8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y\big) = (0, 0)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y \ .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2,1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2,1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6-t) \ \text{ pro } \ t \in (0,6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6-t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t-4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (zejména nezapomínejme na vrcholy trojúhelníku jako samostatné vazby, které nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat) dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minima v bodě $(4,2)$.

6.7 (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

$$x + y + z = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Řešení:

Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x,y,z) = x + y + z$$
$$\Phi_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M: Jedna z vazeb představuje sféru, takže i M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \;\text{ a }\; \Phi_2'(a) \;\text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (2x, 2y, 2z)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 0$ a $3x^2 = 1$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x + y + z = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Když opět od sebe odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + 2\mu x$$

$$zx = \lambda + 2\mu y$$

dostaneme $z(y - x) = 2\mu(x - y)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = 2\mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = 2\mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = 2\mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

a

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = -\frac{\sqrt{6}}{18}\ .$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech maximum a v druhých minimum.