# 7. cvičení z Matematické analýzy 2

12. - 16. listopadu 2018

Příklady **6.4**, **6.5** a **6.7**.

**7.1** (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Načrtněte útvar určený touto vazbou.

**Řešení:**

Použijeme věty:

**Věta**: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

**Věta**: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na $U$. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \ \&\ \Phi'(a) \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce $f$ zúžené na $M$, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde $g_i$ jsou jednotlivé složky zobrazení $\Phi$, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \ldots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost $k$, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina $M$ se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi $n$ původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet $k$ nezávislých vazeb daných zobrazením $\Phi$.)

Útvar je sféra s poloměrem 1. Položíme

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1\ .$$

Protože

$$\Phi'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

tak $\Phi'(x, y, z) = 0$ právě když $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

je $\Phi'(x, y, z) \neq 0$. Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ lokálního extrému $f$ na $M$ teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -2, 2) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Proto musí být $\lambda \neq 0$ a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = -\frac{1}{\lambda} \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do vazby získáme řešení $a = \pm\frac{1}{3}(1, -2, 2)$ a $\lambda = \pm\frac{3}{2}$. Protože $f$ nabývá extrému na $M$ (neboť $M$ je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 3$.

**7.2** (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$$

na množině

$$M: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Načrtněte tuto množinu.

**Řešení:**
Množina $M$ je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 1\ .$$

**Extrém na $M^\circ$:**

$$f' = \big(2x,\ -2(y-1)\big) = (0,0)$$

nastává právě když $(x,y) = (0,1)$. Tento bod ale neleží v $M^\circ$, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

**Extrém na $\partial M$:**

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x,\ -2(y-1)\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$

$$1 - y = y\lambda\ .$$

Odsud máme, že buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 1$. Z první možnosti a rovnice kružnice máme body $(0, \pm 1)$. Z druhé, tj. $\lambda = 1$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a tudíž body $\Big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f\big(0,1\big) = 0, \qquad f\big(0,-1\big) = -4$$

$$f\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}\ .$$

Množina $M$ je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ a minima v bodě $(0,-1)$.

**7.3** (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \leq y \leq 4 \ .$$

**Řešení:**
Množina $M$ je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \ \ \& \ \ -2 \leq x \leq 2) \ \vee \\ (y = 4 \ \ \& \ \ -2 \leq x \leq 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka) a dva body (kde se obě křivky protínají).

**Extrém na $M^\circ$:**

$$f' = \left(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\right) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x \ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do $M^\circ$, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

**Extrém na $\partial M$:**

Na obou křivkách je nejvhodnější zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• na části hyperboly vyšetřujeme funkci

$$g_1(x) := f(x, x^2) = 4x^2 + x^4 \quad \text{pro} \quad x \in (-2,2) \ .$$

Máme $g_1'(x) = 8x + 4x^3 = 0$ právě když $x = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• na úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_2(x) := f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad \text{pro} \quad x \in (-2,2) \ .$$

Rovnice $g_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 2(3x-2)(x+2) = 0$ má řešení pro $x = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16 \cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16 \cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

**7.4** (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině $M$ dané podmínkami

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

**Řešení:**

Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny $M$), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0\}$.

*uzavřenost* $M$:

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ jsou vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních $\Phi_i$ a jsou tudíž uzavřené. Množina $M$ je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

*omezenost* $M$:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x + y)(5 - x - y) = 8$$
$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$
$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

čímž dostaneme rovnici elipsy $(x')^2 + \frac{3}{4}(y')^2 = \frac{1}{3}$ v nějakých afinně transformovaných souřadnicích

$$\begin{aligned} x' &= x + \tfrac{y}{2} - \tfrac{5}{2} \\ y' &= y - \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

(kde "afinní" = "lineární" + "posunutí").

Anebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

neboli

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina $M$ je omezená.

*nezávislost vazeb*:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (y+z, z+x, x+y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y+z = z+x = x+y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z $M$ tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému $f$ na $M$ teď existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1,1,1) + \mu(y+z, z+x, x+y)$$

a

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + \mu(y+z)$$

$$zx = \lambda + \mu(z+x)$$

dostaneme $z(y-x) = \mu(y-x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru $\lambda$ ani $\mu$ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2,2,1), (1,2,2), (2,1,2) \quad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce $f$ je spojitá a množina $M$ je omezená a uzavřená, nabývá $f$ v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

**7.5** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n + (-2)^n\Big) x^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

**Řešení:**
Poloměr $0 \leq R \leq +\infty$ konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ je jednoznačně určen podmínkou, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

- $|x - x_0| < R \Rightarrow$ řada konverguje (dokonce absolutně),
- $|x - x_0| > R \Rightarrow$ řada diverguje.

Platí:

- Odmocninové kritérium: $\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- Podílové kritérium: $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pokud tato limita existuje.

(Zde používáme dohodu, že $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} = 0$.)

*Poloměr konvergence:* Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|n+1+(-2)^{n+1}\right|}{\left|n+(-2)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} |-2| \cdot \frac{\left|\frac{n+1}{(-2)^{n+1}}+1\right|}{\left|\frac{n}{(-2)^n}+1\right|} = 2$$

Poloměr konvergence je tedy $R = \frac{1}{2}$.

*Součet:* Řadu rozepíšeme. Pro $|x| < \frac{1}{2}$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n+(-2)^n\Big)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$

kde jednotlivé řady sečteme takto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \frac{1}{1-(-2x)} = \frac{1}{1+2x}\ .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\ .$$

Takže

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n+(-2)^n\Big)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+2x}$$

pro $|x| < \frac{1}{2}$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

**7.6** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n}$$

na vnitřku oboru konvergence.

**Řešení:**

*Poloměr konvergence:* Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou):

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ a nechť je $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = q$. Pokud je $0 \le q < 1$, řada konverguje a pokud je $q > 1$, řada diverguje.

V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^{2n-1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\,|x^2| = |x^2|$$

Tedy řada konverguje pro $|x^2| < 1$ a diverguje pro $|x^2| > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

*Součet:* Pro $0 < |x| < 1$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \; .$$

Vzniklou řadu sečteme jako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$, kde $y := x^2$. Pak už snadno máme:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \int \frac{1}{1-y} \, \mathrm{d}y = -\ln(1-y) + C \; .$$

Po dosazení $y = 0$ dostaneme $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}$$

pro $|x| < 1$. Rovnost platí i pro $x = 0$, pokud pravou stranu dodefinujeme její limitou v $x = 0$:

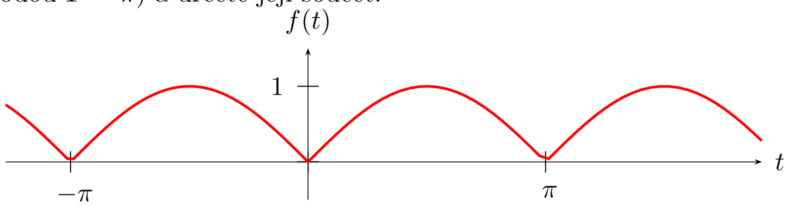
$$\lim_{x \to 0} -\frac{\ln(1-x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \underbrace{\frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}}_{\to 1} = 0$$

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

**7.7** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi)$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.




**Řešení:**
**Definice:** Nechť $f$ je $T$-periodická funkce, která je integrabilní na intervalu $[0, T]$.

Její **Fourierovu řadu** definujeme jako $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je její frekvence,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \, dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) \, dt$$

a

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) \, dt$$

pro $k \in \mathbb{N}$. Toto pak zapisujeme jako

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big].$$

**Tvrzení:** (i) Pokud $f$ je lichá, pak $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$ (neboli při rozvoji nepoužíváme sudé funkce $\cos(k\omega t)$ a konstantu 1).

(ii) Pokud $f$ je sudá, pak $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt$ (neboli při rozvoji nepoužíváme liché funkce $\sin(k\omega t)$).

Použili jsme prostě to, že pro sudou funkci $g$ s periodou $T$ a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\int\limits_0^T g(t)\, dt = \int\limits_{0+c}^{T+c} g(t)\, dt = \int\limits_{-T/2}^{T/2} g(t)\, dt = 2 \int\limits_0^{T/2} g(t)\, dt$$

a podobně pro lichou $h$ s periodou $T$ a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\int\limits_0^T h(t)\, dt = \int\limits_{0+c}^{T+c} h(t)\, dt = \int\limits_{-T/2}^{T/2} h(t)\, dt = 0\ .$$

Perioda naší funkce je $T = \pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Funkce $f$ je sudá, tedy $b_k = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$. Spočítáme zbylé koeficienty Fourierovy řady funkce $f$, kde opět využijeme sudosti a periodičnosti funkcí $f(t)\cos(k\omega t)$ pro $k = 0, 1, \dots$ :

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, dt = \frac{4}{\pi} \Big[ -\cos t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos(2kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \big( \sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t \big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) =$$

$$= \frac{-4}{\pi(4k^2-1)} \quad \text{pro } k \geq 1.$$

**Poznámka:** Použili jsme vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

a tedy

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big( \sin(x+y) + \sin(x-y) \Big)\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(2kt) + b_k \sin(2kt)\big] =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt\ .$$

**Jordanovo kritérium:** Nechť $f$ je $T$-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu $I$ délky $T$. Předpokládejme, že její derivace $f'$ je po částech spojitá na $I$.

Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right] \right) = \frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)].$$

Pokud je $f$ navíc spojitá $\mathbb{R}$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$ konverguje k $f$ *stejnoměrně.*

Periodické rozšíření funkce $f$ je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$\sin t = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt$$

pro všechna $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

**Parsevalova rovnost:** Nechť $f$ je $T$-periodická funkce, která má konečný integrál z $f$ a z $f^2$ na nějakém intervalu $I$ délky $T$. Pak pro koeficienty $a_n$, $b_n$ z její Fourierovy řady platí rovnost

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

.

Pro náš příklad tudíž z Parsevalovy rovnosti dostáváme, že

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4k^2-1)^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = 1$$

a tedy máme takovouto rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \,.$$

**Poznámka:** Mějme vektorový prostor $V$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a navzájem kolmé nenulové vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in V$. Pro vektor $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$, kde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ máme

$$\langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = \lambda_i \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = \lambda_i \|\vec{u}_i\|^2$$

tedy

$$\lambda_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2} \,.$$

A dále platí

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\lambda_1 \vec{u}_1\|^2 + \cdots + \|\lambda_n \vec{u}_n\|^2 \,.$$

To je motivací pro následující zobecnění:

Uvažujme vektorový prostor všech integrabilních funkcí na intervalu $[0, T]$ takových, že mají i integrabilní kvadrát na intervalu $[0, T]$, a skalární součin těchto funkcí definovaný jako

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t)\, dt \,.$$

Označíme si obvyklou normu $\|f\|^2 := \langle f, f \rangle$. Přitom platí, že

$$\|1\|^2 = \int_0^T 1^2\, dt = T$$

$$\|\cos(k\omega t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(k\omega t)\,dt = \tfrac{T}{2}$$

$$\|\sin(k\omega t)\|^2 = \int_0^T \sin^2(k\omega t)\,dt = \tfrac{T}{2}$$

pro $k \geq 1$ a funkce

$$1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \ldots$$

jsou vzájemně kolmé ve skalárním součinu. Dokonce tvoří (v určitém smyslu) ortogonální bázi námi uvažovaného prostoru.

Pro koeficienty ve Fourierově řadě pak platí:

$$\tfrac{a_0}{2} = \tfrac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot 1\,dt = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2},$$

$$a_k = \tfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\,dt = \frac{\langle f, \cos(k\omega t) \rangle}{\|\cos(k\omega t)\|^2}$$

a

$$b_k = \tfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\,dt = \frac{\langle f, \sin(k\omega t) \rangle}{\|\sin(k\omega t)\|^2}\ .$$

Parsevalova rovnost je vlastně zobecněná Pythagorova věta: Pro námi uvažovanou funkci $f$ máme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$$

a odsud plyne

$$\|f\|^2 = \underbrace{\|\tfrac{a_0}{2} \cdot 1\|^2}_{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot T} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( \underbrace{\|a_k \cos(k\omega t)\|^2}_{a_k^2 \cdot \frac{T}{2}} + \underbrace{\|b_k \sin(k\omega t)\|^2}_{b_k^2 \cdot \frac{T}{2}} \Big)\ .$$

(Důkaz ovšem není triviální!)

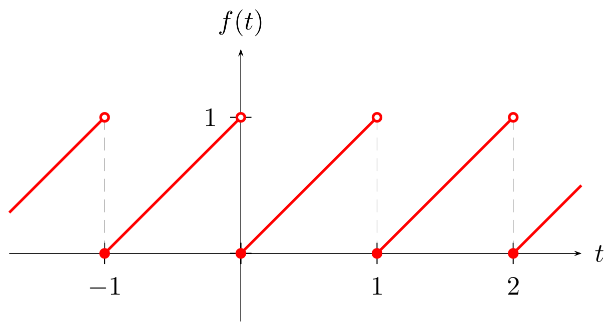
Tedy skutečně máme

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{2}{T} \|f\|^2 = \tfrac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k^2 + b_k^2\big)\ .$$

**7.8** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = t, \qquad t \in [0, 1)$$

(tj. s periodou $T = 1$) a určete její součet.

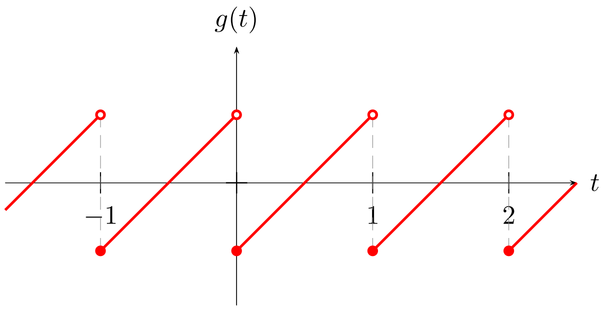


**Řešení:**
Pro Fourierovu řadu funkce $f$ máme: $T = 1$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ a $\frac{2}{T} = 2$. Funkce není ani sudá ani lichá, ale vhodným posunutím získáme funkci $g$, která (téměř) lichá je (alespoň z hlediska integrálu), a sice:

$$g(t) := f(t) - \frac{1}{2}$$

s periodou $T = 1$, která na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ má předpis

$$g(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & , \ t \in \langle 0, \frac{1}{2}), \\ t + \frac{1}{2} & , \ t \in \langle -\frac{1}{2}, 0). \end{cases}$$




Najdeme teď Fourierovu řadu pro funkci $g$ (s periodou $T = 1$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$). Z lichosti $g$ dostáváme $a_i = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots$ a pro zbylé koeficienty máme

$$b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} g(t) \sin(k\omega t)\, dt = 4 \int\limits_0^{1/2} (t - \tfrac{1}{2}) \sin(2k\pi t)\, dt = -4 \left[ (t - \tfrac{1}{2}) \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_{t=0}^{t=1/2} + 4 \int\limits_0^{1/2} \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} + 4 \underbrace{\left[ \frac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_{t=0}^{t=1/2}}_{=0} = -\frac{1}{k\pi}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.
Takže

$$f - \tfrac{1}{2} = g \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t)$$

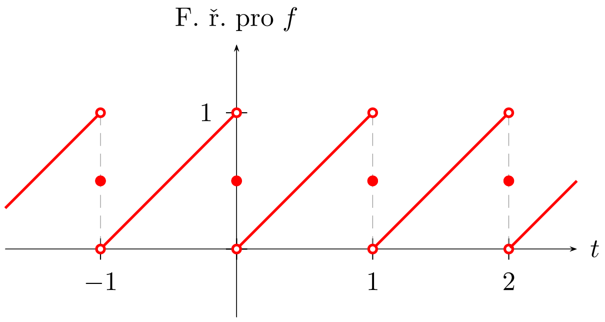
a podle Jordanova kritéria je

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ g(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Úpravou pak získáme:

$$f \sim \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t \in \mathbb{Z} \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

kde součet Fourierovy řady pro $f$ má graf




To, že jsme takto získali skutečně Fourierovu řadu pro $f$, plyne z její jednoznačnosti (nebo snadno z linearity výpočtu koeficientů).