8. cvičení z Matematické analýzy 2

19. - 23. listopadu 2018

8.1 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou): V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|}{\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3}|x^2| = |x^2|$$

Tedy řada konverguje pro $|x^2| < 1$ a diverguje pro $|x^2| > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

Součet: Pro $|x| < 1$ platí, že

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ .$$

Vzniklou řadu sečteme jako geometrickou: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} - 1$, kde $y := x^2$. Pak už snadno máme:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) - 1$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) - 1 \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\big) + x + C \ .$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme $0 = \frac{1}{2}\big(-\ln(1) + \ln(1)\big) + 0 + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

8.2 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+(-1)^n)nx^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(2^{n+1}+(-1)^{n+1})(n+1)\right|}{\left|(2^n+(-1)^n)n\right|}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n+1}{n}\frac{\left|1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|}{\left|1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right|}=2$$

Poloměr konvergence je tedy $R=\frac{1}{2}$.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad. To můžeme udělat na společném oboru konvergence těchto řad. Pro $|x|<\frac{1}{2}$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+(-1)^n)nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(2x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}n(-x)^n=2x\sum_{n=0}^{\infty}n(\underbrace{2x}_{y_1})^{n-1}+(-x)\sum_{n=0}^{\infty}n(\underbrace{-x}_{y_2})^{n-1}$$

protože poloměr konvergence řad na pravé straně je postupně $R_1=\frac{1}{2}$ a $R_2=1$. Pro sečtení využijeme toto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}ny^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\right)'=\left(\frac{1}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}\ .$$

Takže po dosazeni $y_1=2x$ a $y_2=-x$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+(-1)^n)nx^n=\frac{2x}{(1-2x)^2}-\frac{x}{(1+x)^2}$$

pro $|x|<\frac{1}{2}$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

8.3 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Střed řady je $x_0=-1$.

Poloměr konvergence: Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{n}{n+1}\frac{\left|1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right|}{\left|1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}\right|}=3$$

Poloměr konvergence je tedy $R = \frac{1}{3}$.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad. To můžeme udělat na společném oboru konvergence těchto řad. Pro $|x+1| < \frac{1}{3}$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\overbrace{3(x+1)}^{y_1}\big)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\overbrace{-2(x+1)}^{y_2}\big)^n}{n}$$

protože poloměr konvergence řad na právě straně je postupně $R_1 = \frac{1}{3}$ a $R_2 = \frac{1}{2}$. Pro sečtení využijeme toto:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \int \frac{1}{1-y} \mathrm{d}y = -\ln(1-y) + C \ .$$

Pro $y = 0$ dostaneme, že $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$.

Takže po dosazeni $y_1 = 3(x+1)$ a $y_2 = -2(x+1)$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n = -\ln\big(1 - 3(x+1)\big) - \ln\big(1 + 2(x+1)\big) =$$

$$= -\ln\big(-2-3x\big) - \ln\big(3+2x\big)$$

pro $|x+1| < \frac{1}{3}$, tj. pro $x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

8.4 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Máme

$$a_k = \begin{cases} n = \frac{k-1}{2}, & \text{pro } k = 2n+1 \geq 3 \text{ liché}, \\ \quad 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

takže nemůžeme přímo použít podílové kritérium. Stačí ale řadu trochu přepsat, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ x^{2n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} n\ (x^2)^n$$

a zjistit poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n\ y^n$, která má podle podílového kritéria $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ poloměr konvergence roven 1, tj. konverguje pro $|y| < 1$ a diverguje pro $|y| > 1$. Pro $y = x^2$ tak dostáváme, že pro $|x^2| < 1$ to konverguje a pro $|x^2| > 1$ to diverguje. Neboli poloměr konvergence původní řady je rovněž $R = 1$. Mohli jsme ovšem také na začátku využít i $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \cdots = 1$.

Součet: Využijeme toho, co už máme, tj. pro $|y| < 1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n\ y^{n-1} = y \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n \right)' = y \left(\frac{1}{1-y} - 1 \right)' = \frac{y}{(1-y)^2}\ .$$

Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ x^{2n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} n\ (x^2)^n = \frac{x \cdot x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^3}{(1-x^2)^2}$$

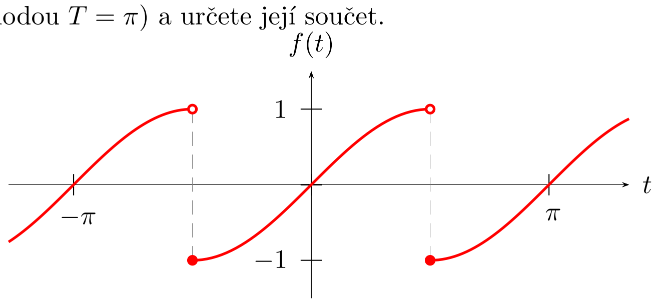
pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

8.5 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Z lichosti f plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k (opět z lichosti) máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(2k-1)t - \cos(2k+1)t \Big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} - \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$$

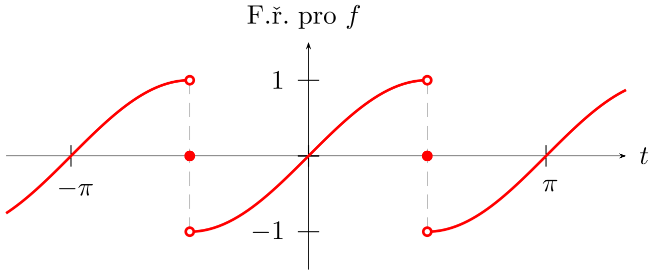
protože

$$\sin\Big((2k+1)\tfrac{\pi}{2} \Big) = (-1)^k \text{ pro } k \in \mathbb{Z}\ .$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje Fourierova řada k periodickému rozšíření funkce f a její graf je:



Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

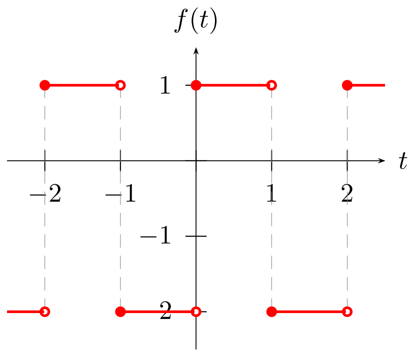
a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)\ .$$

8.6 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

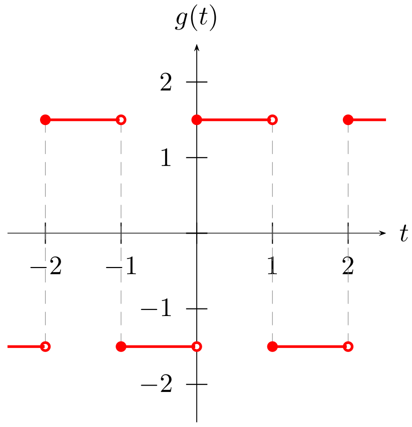
$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [0,1), \\ -2 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$. Funkce není ani sudá ani lichá, ale vhodným posunutím získáme funkci g, která (téměř) lichá je (alespoň z hlediska integrálu), a sice:

$$g(t) := f(t) + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} & , \ t \in [0,1), \\ -\frac{3}{2} & , \ t \in [-1,0). \end{cases}$$



Najdeme teď Fourierovu řadu pro funkci g (s periodou $T = 2$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$). Z lichosti g dostáváme $a_i = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots$ a pro zbylé koeficienty máme

$$b_k = \tfrac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} g(t) \sin(k\omega t)\, dt = 2 \int\limits_0^{1} \tfrac{3}{2} \sin(k\pi t)\, dt = -3 \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi} \right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1-(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} 0 & , k \text{ sudé} \\ \frac{6}{\pi(2n-1)} & , k = 2n-1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.

Takže

$$f + \tfrac{1}{2} = g \sim \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \tfrac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big)$$

a podle Jordanova kritéria je

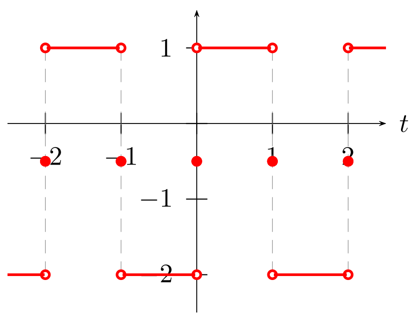
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ g(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Úpravou pak získáme:

$$f \sim -\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , t \in \mathbb{Z} \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

kde součet Fourierovy řady pro f má graf

F.ř. pro f

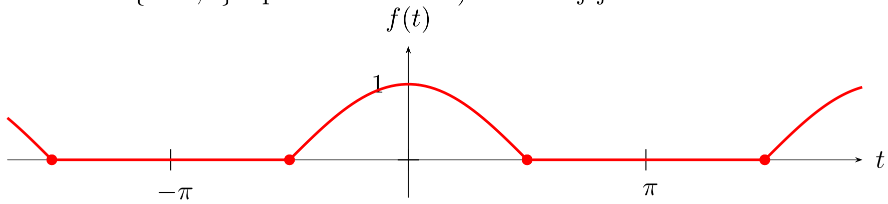


To, že jsme takto získali skutečně Fourierovu řadu pro f, plyne z její jednoznačnosti (nebo snadno z linearity výpočtu koeficientů).

8.7 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.



Řešení:

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce f je sudá. Proto $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a dále ze sudosti f máme pro zbyle koeficienty Fourierovy řady funkce f, ze:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{2}{\pi} \Big[\sin t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t \big)\, dt =$$

$$= \{\text{dále platí pro } k \geq 2\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ liché} \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} & , k = 2n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

protože

$$\sin\Big((2n+1)\tfrac{\pi}{2} \Big) = (-1)^n \text{ pro } n \in \mathbb{Z}\ .$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \cdots = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos 2t + 1 \big)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2}\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá k a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

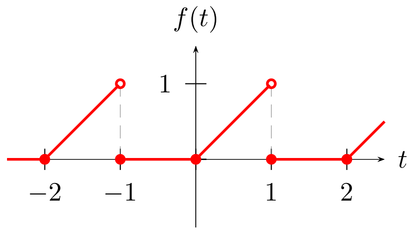
a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big)\ .$$

8.8 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & , \ t \in [0,1), \\ 0 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. funkci s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:

Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^2 f(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t \cos(k\pi t)\, dt = \underbrace{\left[t \cdot \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\, dt = \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t \sin(k\pi t)\, dt = -\left[t \cdot \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\, dt = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \underbrace{\left[\tfrac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

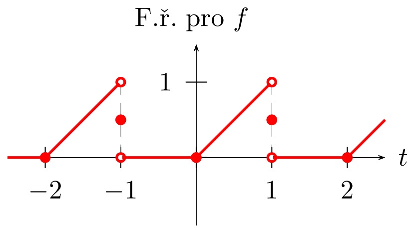
Takže

$$f \sim \tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t)$$

a podle Jordanova kritéria je

$$\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi t)+\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,t\in 2\mathbb{Z}+1\\ f(t) & ,t\in\mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1)\end{cases}.$$

s grafem



8.9 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(a) $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx.$

(b) $\int_0^{1}\int_0^{x} f(x,y)\ dy\ dx+\int_1^{2}\int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx.$

(c) $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy.$

Řešení:
Fubiniho věta: Nechť

- $E\subseteq\mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f:E\to\mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint_E |f|\ dS<\infty$ (např. pokud funkce je omezená a E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint_E f\ dS$ a platí

$$\iint_E f\ dS=\int_{\pi_2(E)}\left(\int_{\substack{\textit{(vodorovný) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \mathbb{R}\times\{y\}}} f(x,y)\ dx\right)dy$$

$$\iint_E f\ dS=\int_{\pi_1(E)}\left(\int_{\substack{\textit{(svislý) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\ dy\right)dx,$$

kde $\pi_1,\pi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y)=x$ a $\pi_2(x,y)=y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

na $E = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\, dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

Obrácená Fubiniova věta (verze použitelná i pro neomezené funkce nebo množiny):
Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : E \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* funkce spojitá na E°
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný, oba se rovnají a funkce má dvojný integrál $\iint\limits_E f\, dS$ (rovný této společné hodnotě).

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

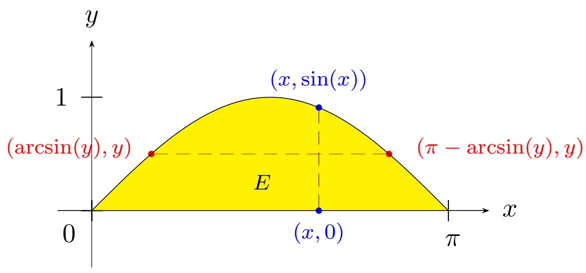
$$E: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \le \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$, takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y\rangle \times \{y\}.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

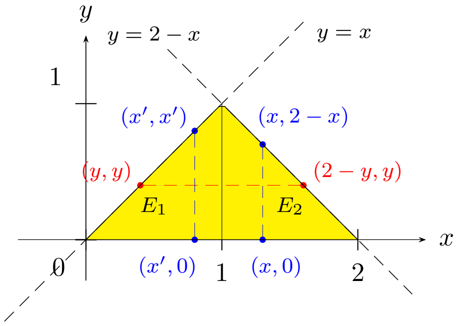
$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(b) Základní oblasti integrace jsou

$$E_1 : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$

$$E_2 : \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

Množiny E_1 a E_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1\rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $E = E_1 \cup E_2$.



Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

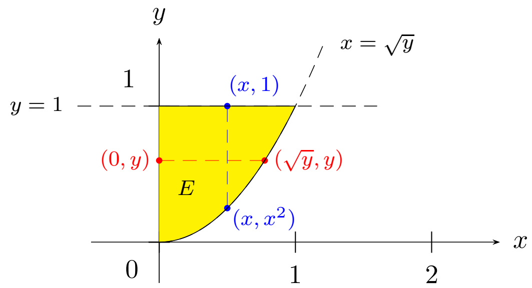
$$\iint_{E_1} f\ dS \ + \ \iint_{E_2} f\ dS = \iint_{E_1 \setminus E_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint_{E_1 \cap E_2} f\ dS \ + \ \iint_{E_2 \setminus E_1} f\ dS \ \left(= \iint_{E_1 \cup E_2} f\ dS \ + \ \iint_{E_1 \cap E_2} f\ dS \right)$$

Takže $\pi_2(E) = \langle 0, 1\rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle y, 2 - y\rangle \times \{y\}$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(c) Základní oblast integrace je

$$E : \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^2 \leq y \leq 1.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\ dy\ dx.$$

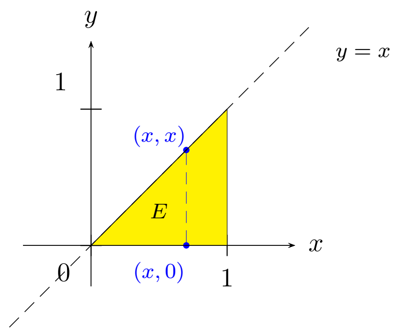
8.10 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$

kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x\ .$$



Máme

$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\ dy\ dx = \int_0^1 \sin x\ dx = 1 - \cos(1).$$

8.11 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

Řešení:
Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$E: \quad 0 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 4 - x^2 \quad \& \quad y \ne 4.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině E sice není omezená (v okolí bodu $(0,4)$), ale je nezáporná, takže Fubiniovu větu použít můžeme.

Proč funkce není omezená: Množina E je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku E, tedy vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

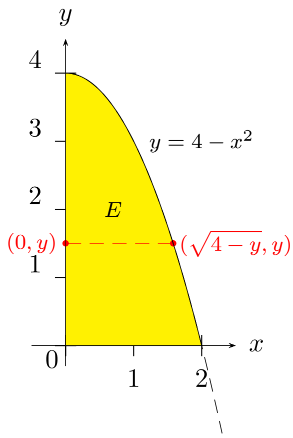
Poznámka: Připomeňme si ještě, jak je definován integrál $\iint_E f\ dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} |f|\ dS =: \iint_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Po záměně řezů dostaneme vztahy

$$E: \quad 0 \le y < 4 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{4-y}$$



takže dostáváme

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dx \Big)\, dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4} \Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8-1}{4}.$$