9. cvičení z Matematické analýzy 2

26. - 30. listopadu 2018

9.1 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (x+1)^{n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Řada má střed v $x_0 = -1$.

Poloměr konvergence: Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou):

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ a nechť je $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = q$. Pokud je $0 \le q < 1$, řada konverguje a pokud je $q > 1$, řada diverguje.

V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) (x+1)^{n+2}\right|}{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) (x+1)^{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} |x+1| = |x+1|$$

Tedy řada konverguje pro $|x+1| < 1$ a diverguje pro $|x+1| > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

Součet: Řadu rozepíšeme a zjednodušíme substituci $y = x + 1$. Pro $|y| < 1$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) y^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+1} + y \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}\right)$$

kde jednotlivé řady sečteme takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^{n+1} = y^2 \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{y^2}{1-y} \ .$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \int \frac{1}{1-y} \,\mathrm{d}y = -\ln(1-y) + C \ .$$

Po dosazení $y = 0$ dostaneme $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) y^{n+1} = \frac{y^2}{1-y} - y\ln(1-y)$$

pro $|y| < 1$, a po dosazeni $y = x + 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (x+1)^{n+1} = -\frac{(x+1)^2}{x} - (x+1)\ln(-x)$$

pro $|x + 1| < 1$. (Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

9.2 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Můžeme využít podílové kritérium:
V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|}{\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Tudíž poloměr konvergence je $R = 1$.

Součet: Označme si $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$. Pro $|x| < 1$ platí, že

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} \underbrace{=}_{\text{pro } x\neq 0} \frac{1}{x^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=h(x)} .$$

Vzniklou řadu znovu zderivujeme, konkrétně máme:

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

a tedy

$$h(x) = \int \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \,\mathrm{d}x = -\ln(1-x) - x + C .$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme $0 = h(0) = -\ln(1) + 0 + C$, tedy $C = 0$. Dále máme

$$g(x) = \int \frac{h(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{1}{x^2}\ln(1-x) - \frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x .$$

Pomocí per partes dostaneme

$$\int -\frac{1}{x^2}\ln(1-x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\ln(1-x) + \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}}_{=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}} \,\mathrm{d}x$$

a tudíž pro $0 < |x| < 1$ celkově máme

$$g(x) = \int \left(-\frac{1}{x^2}\ln(1-x) - \frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\ln(1-x) + \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \,\mathrm{d}x \; - \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{x}\ln(1-x) + \int \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\ln(1-x) - \ln(1-x) + D$$

Po spočítání limity v $x = 0$ dostaneme

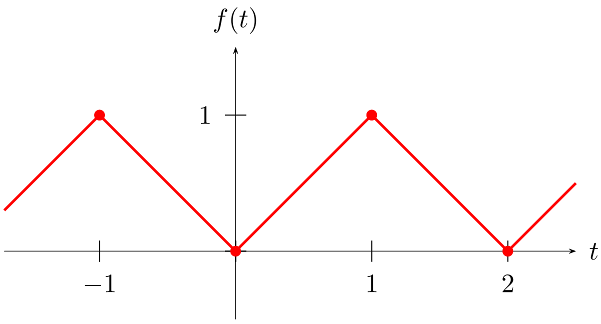
$$0 = g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x)}{-x} - \ln(1-x) + D = -1 + 0 + D ,$$

tedy $D = 1$. Celkově pak součet řady je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \tfrac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1$$

kde rovnost platí pro $|x| < 1$, když přitom funkci $\frac{\ln(1-x)}{x}$ definujeme v bodě $x = 0$ spojitě.
(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno.)

9.3 Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = |t|$, $-1 \le t < 1$.



Řešení:
Perioda rozšíření bude $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Rozšíření funkce f je sudé, takže $b_k = 0$. Zbylé koeficienty Fourierovy řady jsou tyto:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t\,dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} dt = 1;$$

pro $k \ge 1$:

$$a_k = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t \cos k\pi t\,dt = 2 \left[t \cdot \frac{\sin k\pi t}{k\pi} + \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2n \\ -\frac{4}{k^2\pi^2}, & \text{pro } k = 2n+1 \end{cases}$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Protože periodické rozšíření funkce f je spojité, tak Fourierova řada k němu konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$. Proto můžeme napsat dokonce

$$|t| = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi t, \qquad t \in [-1, 1].$$

9.4 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál:

(a)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\ dy\ dx$$

(b)

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\ dx\ dy$$

Řešení:
(a) Bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D: \quad 0 \le x \le 8 \quad \& \quad \sqrt[3]{x} \le y \le 2,$$

takže

$$D: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\ dy\ dx = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\ dx \Big)\ dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \left[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

(b) Zintegrujeme přímo:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\ dx\ dy = \int_0^1 \left[3y^2 e^{xy} \right]_{x=0}^{x=y^2}\ dy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3} - 3y^2\ dy = \left[e^{y^3} - y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = e - 2.$$

9.5 (polární souřadnice)
Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy\ dx,$$

(b)

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2} dy\ dx,$$

Řešení:
Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f \, dS = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

Vzhledem ke tvaru množiny i funkce zde budeme používat transformaci pomocí polárních souřadnic

$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 2 \ .$$

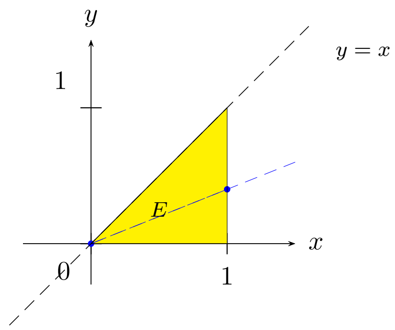
takže máme

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dS = \iint\limits_{U} r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{=\cos 2\varphi} \, dr \, d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{2} r^2 \, dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int\limits_{0}^{\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi \right)}_{=0} = 0 \ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$



což je trojúhelník. Množinu U, která parametrizuje $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic dostaneme dosazením do nerovnosti pro E

$$0 \le \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} \le 1 \quad \& \quad 0 \le \underbrace{r\sin\varphi}_{=y} \le \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} .$$

a úpravě, ale hlavně pomocí náčrtku, jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le r \le \tfrac{1}{\cos\varphi} .$$

takže máme

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x}{x^2+y^2}\, dS = \iint_U \cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\varphi\, dr\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\varphi = \frac{\pi}{4} .$$

9.6 (oblast zadaná v polárních souřadnicích)

Určete velikost plochy E (v kartézských souřadnicích), kterou křivka $\varrho = \sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, (zadaná pomocí polárních souřadnic) ohraničuje. Pokuste se také načrtnout danou křivku.

Řešení:
V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{E=\Phi(U)} 1\, dS = \iint_U r\, dr\, d\varphi = \int_0^\pi \Big(\int_0^{\sin\varphi} r\, dr \Big)\, d\varphi = \int_0^\pi \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin\varphi$, můžeme body (x, y) křivky parametrizovat pomocí úhlu φ a pak platí, že

$$x = \rho\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = \sin^2\varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sin\varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

9.7 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

(a)
$$\iiint_E xyz \; dV,$$
kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)
$$\iiint_E y \; dV,$$
kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

(c)
$$\iiint_E xy \; dV,$$
kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

(d)
$$\iiint_E y\cos(z + x)\, dx\, dy\, dz$$
kde E : $\quad 0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}.$

Řešení:
Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak
$$\iiint_E f \; dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x, y, z) \; dz\Big) \; dS,$$
kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$ a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y. Případně:
$$\iiint_E f \; dV = \int_{\pi_1(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x, y, z) \; dz\Big) \; dy\Big) \; dx =$$
$$= \int_{\pi_1(E)} \Big(\iint_{(\{x\}\times\mathbb{R}^2)\cap E} f(x, y, z) \; dz \; dy\Big) \; dx$$
kde $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_1(x, y, z) = x$.

Průniky uvedené v integrálech nejsou nic jiného než jednorozměrné řezy příslušných množin, tj. "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup opakujeme (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.) Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_1(E)$).

(a) Oblast integrace je
$$E : \quad 0 \le z \le xy, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$
Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\; dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{xy} xyz\; dz\; dy\; dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\; dy\; dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^5 - x^{11}\; dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad 0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

I zde platí

$$\iiint\limits_E y\; dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{x+2y} y\; dz\; dy\; dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} y(x+2y)\; dy\; dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\; dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

(c) Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\; dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y} \int\limits_0^{y-x} xy\; dz\; dx\; dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y} y^2x - x^2y\; dx\; dy = \int\limits_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\; dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

(d) Hodnota integrálu je $\frac{1}{180}$.

9.8 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace a spočítejte integrál

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{3-3x} \int\limits_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3-3x \quad \& \quad 0 \le z \le 3-3x-y$$

což je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ a $(0,0,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem (který bychom asi uměli spočítat i jinak, ale my ho pro procvičení zintegrujeme). Máme tedy

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3-3x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 (3-3x)^2 - \frac{(3-3x)^2}{2}\,dx =$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\ .$$

9.9 (cylindrické souřadnice)
Spočítejte objem tělesa

$$A: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2 \ \ \& \ \ x^2+y^2 \le 1\ .$$

Těleso A načrtněte.

Řešení:
Těleso A je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$ a válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule. Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Po dosazení do nerovnosti máme

$$r^2 + h^2 \le 2, \quad r^2 \le 1$$

Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{2-r^2} \le h \le \sqrt{2-r^2}\ .$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A = \iiint\limits_{A=\Phi(U)} 1 \text{ d}V = \iiint\limits_{U} r \text{ d}h \text{ d}r \text{ d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{2-r^2}} r \text{ d}h \text{ d}r \text{ d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{2-r^2} \text{ d}r \text{ d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{2}{3}(2-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=1} \text{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \text{ d}\varphi = \tfrac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\ .$$

Výpočet pomocí sférických souřadnic (těžší):
Zjednodušíme se to tím, že těleso je symetrické podle roviny $z=0$, takže si spočítáme jen objem části A' nad touto rovinou:

$$\Psi: \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta\ .$$

Po dosazení do nerovností pro A' máme

$$0 \le z = r\cos\vartheta, \quad r^2 \le 2, \quad r^2\sin^2\vartheta \le 1$$

speciálně $0 \le r \le \min\{\sqrt{2}, \frac{1}{\sin\vartheta}\}$. Z toho dostáváme (i podle náčrtu) oblast parametrizace jako

$$V : 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \text{a} \quad \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} & \text{pro} \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \\ 0 \le r \le \frac{1}{\sin\vartheta} & \text{pro} \quad \vartheta \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A' = \iiint\limits_{A'=\Psi(V)} 1 \text{ d}V = \iiint\limits_{V} r^2 \sin\vartheta \text{ d}r \text{ d}\vartheta \text{ d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin\vartheta \text{ d}r \text{ d}\vartheta \text{ d}\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\vartheta}} r^2 \sin\vartheta \text{ d}r \text{ d}\vartheta \text{ d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin\vartheta \text{ d}\vartheta \text{ d}\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin^3\vartheta} \sin\vartheta \text{ d}\vartheta \text{ d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} \Big[-\cos\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} \text{ d}\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \Big[-\operatorname{cotg}\vartheta \Big]_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \text{ d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ d}\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Celkem tedy

$$\textit{objem } A = 2 \cdot \textit{objem } A' = \frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) \ .$$