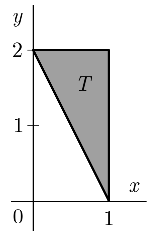
Test 2.

- Vypočtěte

$$\iint\limits_T y\,dxdy,$$

kde množina T je trojúhelník v rovině $\mathbb{R}^2$ nakreslený na obrázku:



řešení:

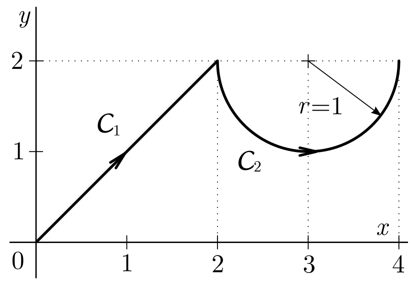
Množina T je ohraničena přímkami $y = 2 - 2x \Leftrightarrow x = 1 - \frac{y}{2}$, $y = 2$, $x = 1$.

$$\iint\limits_T y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{2-2x}^2 y\,dy = \int_0^1 dx\,[\frac{y^2}{2}]_{2-2x}^2 = \int_0^1 dx\,\frac{1}{2}[2^2 - (2-2x)^2] =$$

$$= \int_0^1 dx\,2[1-(1-x)^2] = 2 + 2[\frac{(1-x)^3}{3}]_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\iint\limits_T y\,dxdy = \int_0^2 dy\,y \int_{1-\frac{y}{2}}^1 dx = \int_0^2 dy\,y\frac{y}{2} = [\frac{y^3}{6}]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

- Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{F}(x,y) = (x,y)$ podél orientované křivky složené z úsečky a kruhového oblouku, jejíž tvar a orientace je nakreslena na obrázku:



řešení:

$$\int_{(\mathcal{C})} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = \int_{(\mathcal{C}_1)} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} + \int_{(\mathcal{C}_2)} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}$$

Parametrizace křivky $\mathcal{C}_1 : \Phi(t) = [0,0] + t(1,1) = [t,t]$, $t \in \langle 0,2\rangle$, $\Phi'(t) = (1,1)$. Parametrizace je souhlasná,

$$\int_{(\mathcal{C}_1)} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = +\int_0^2 (t,t) \bullet (1,1)dt = [t^2]_0^2 = 4.$$

Parametrizace křivky $\mathcal{C}_2 : \Phi(\varphi) = [3,2] + (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = [3+\cos(\varphi), 2+\sin(\varphi)]$, $\varphi \in \langle -\pi, 0\rangle$, $\Phi'(\varphi) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$. Parametrizace je souhlasná.

$$\int_{(\mathcal{C}_2)} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = +\int_{-\pi}^0 (3+\cos(\varphi), 2+\sin(\varphi)) \bullet (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))dt = \int_{-\pi}^0 (-3\sin(\varphi) + 2\cos(\varphi))\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^0 (-3\sin(\varphi) + 2\cos(\varphi))\,d\varphi = -3\cdot(-2) + 2\cdot 0 = 6.$$

Práce podél zadané křivky je

$$\int_{(\mathcal{C})} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = 4 + 6 = 10.$$