1. cvičení z Matematické analýzy 2

23. - 27. září 2019

1.1 Ukažte, že objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ je

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|\ .$$

Řešení:
Připomeňme nejdříve, že obsah rovnoběžníku (v rovině) se počítá jako "délka podstavy krát výška". Jestliže je rovnoběžník určený vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$, které svírají (konvexní) úhel α, pak je

$$\textit{obsah rovnoběžníka} = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin\alpha| = \|\vec{v} \times \vec{w}\|.$$

Připomeňme si, co je to vektorový součin vektorů $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$\vec{v} \times \vec{w} := \Big(v_2w_3 - v_3w_2, \quad -(v_1w_3 - v_3w_1), \quad v_1w_2 - v_2w_1\Big) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\ .$$

Protože platí

$$\left(\frac{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}\right)^2 + \Bigg(\underbrace{\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}}_{\cos\alpha}\Bigg)^2 = 1$$

tak skutečně je $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin\alpha|$.

Podobně platí, že objem rovnoběžnostěnu je "obsah podstavy krát výška" (což lze nahlédnout buď vhodným rozřezáním a znovusestavením nebo přiblížením pomocí tenkých vodorovných řezů). Z předchozího máme

- *obsah podstavy* $= \|\vec{v} \times \vec{w}\|$
- *výška* $= |\vec{u} \cdot \vec{n}|$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor kolmý k podstavě (např. $\vec{n} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$).

Takže

$$\textit{objem rovnoběžnostěnu} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot |\vec{u} \cdot \vec{n}| = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \left|\vec{u} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}\right| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|\ .$$

1.2 Ukažte, že vzdálenost $\rho(A, \sigma)$ bodu $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ od roviny $\sigma : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ v $\mathbb{R}^3$ je

$$\rho(A, \sigma) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Řešení:
Normálový vektor roviny je $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Zvolme si nějaký bod $B \in \mathbb{R}^3$ v rovině σ. Vzdálenost bodu $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny σ je dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - B$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left|(A - B) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| .$$

Protože bod B je v rovině σ, platí $\vec{n} \cdot (B - O) + \delta = 0$, kde $O = (0, 0, 0)$ je počátek soustavy souřadnic. Můžeme tak psát

$$\left|(A - B) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \frac{|(A - O) \cdot \vec{n} - (B - O) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(A - O) \cdot \vec{n} + \delta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} .$$

Definice: Pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definujeme vrstevnici na hladině $c \in \mathbb{R}$ jako množinu

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in D(f) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\} .$$

Zde $D(f)$ je definiční obor funkce f.

(Zdůrazněme, že vrstevnice obvykle bývají objekty s dimenzí $n - 1$. Ale není to vždy pravidlem!)

Poznámka: Nechť g je nějaká funkce z $\langle 0, +\infty)$ do $\mathbb{R}$. Graf funkce tvaru $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ je rotačně symetrický podle osy z, a vznikne rotací grafu funkce g kolem osy z. Vrstevnice funkce f jsou složeny z kružnic. (Nemusí to ale být vždy jen prosté kružnice, nýbrž také např. mezikruží).

1.3 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (kužel)

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ (eliptický paraboloid),

(c) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu),

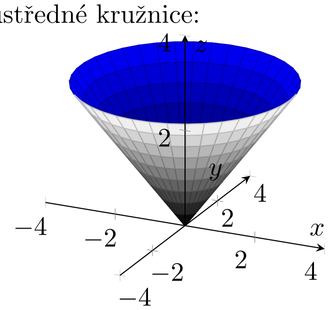
(d) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 - y^2}$ (horní polovina jednodílného rotačního hyperboloidu),

(e) $f(x, y) = xy$ (hyperbolický paraboloid),

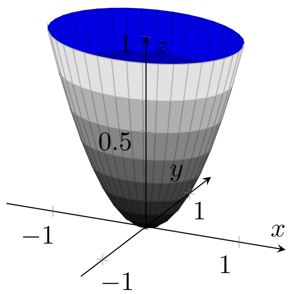
(f) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (hyperbolický paraboloid).

Řešení:
Označme si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hodnota r představuje vzdálenost bodu (x, y, z) od 3. osy (tj. osy z).

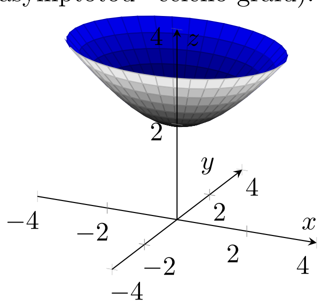
(a) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r$, pro $r \geq 0$. Jde tedy o kužel a vrstevnice jsou soustředné kružnice:



(b) Uvažujme nejdříve funkci $h(x, y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$. Její graf (tzv. rotační paraboloid) vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r^2$, pro $r \geq 0$ (tj. rotací paraboly). Graf funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ se od něj bude lišit zúžením ve směru y. Průřezy (tj. vrstevnice) grafu f tak budou soustředné elipsy a celý graf se pak označuje jako eliptický paraboloid.

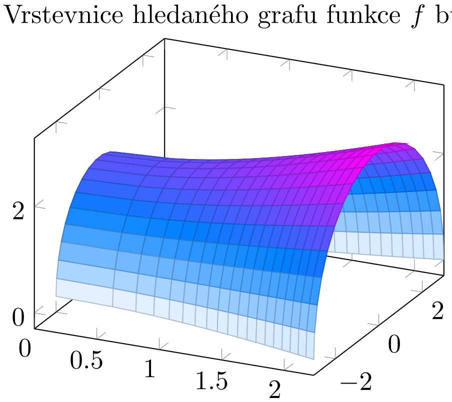


(c) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = \sqrt{4 + r^2}$, pro $r \geq 0$. Abychom zjistili, o co jde, přepíšeme si $z = \sqrt{4 + r^2}$, $r \geq 0$ ekvivalentně jako $z^2 - r^2 = 4$, $z \geq 0$, $r \geq 0$. Graf funkce g je tedy část hyperboly, jejíž hlavní osou je osa z. Její rotací (kolem osy z) vznikne část (jeden díl) dvoudílného rotačního hyperboloidu. Vrstevnice jsou soustředné kružnice a celý útvar zdálky připomíná kužel (který je "asymptotou" celého grafu).



(d) Definiční obor funkce je $D(f):\ y^2 - x^2 \leq 4$ (což je oblast mezi dvěma hyperbolami). Určitý typ rotační symetrie grafu f se dá najít i zde. Ze vztahu $z = \sqrt{4 + x^2 - y^2}$ vyplývá, že platí $(z^2 + y^2) - x^2 = 4$ a $z \geq 0$. Označme si tentokrát $r' := \sqrt{z^2 + y^2}$. Podobně jako výše dostaneme, že množina $(z^2 + y^2) - x^2 = 4$ vznikne rotací hyperboly $(r')^2 - x^2 = 4$ kolem osy x. Tato plocha se nazývá rotační jednodílný hyperboloid.

Podmínka $z \geq 0$ nám pak z ní uřízne její horní polovinu (zde se slovo "horní" vztahuje ke směru osy z). Vrstevnice hledaného grafu funkce f budou hyperboly a jejich asymptoty.

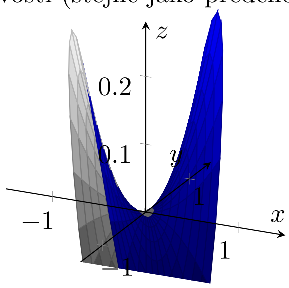


(e)+(f) Zde se hodí všimnout si, že grafy funkcí v (e) a (f) jsou navzájem otočené o $\frac{\pi}{4}$ (a současně přenásobené hodnotou $\frac{1}{2}$). To zjistíme, když si zavedeme nové proměnné $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$ a $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$

neboli použijeme ortogonální transformaci

$$\Phi : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Pak pro $f(x,y) = xy$ je $(f \circ \Phi)(a,b) = \frac{1}{2}(a-b)(a+b) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. Stačí si tedy rozmyslet graf jen pro jeden z případů. Vrstevnice jsou opět zřejmě (soustředné) hyperboly a jejich asymptoty. A výsledný graf se nazývá hyperbolický paraboloid (nebo také sedlová plocha) a je to příklad plochy s tzv. zápornou křivostí (stejně jako předchozí jednodílný hyperboloid).



1.4 Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \ln\left(x \ln(y-x)\right)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

Řešení:

(a)

$$D(f): \; y - x > 0 \wedge \Big(x > 0 \;\wedge\; \ln(y-x) > 0\Big) \;\vee\; \Big(x < 0 \;\wedge\; \ln(y-x) < 0\Big)$$

tedy

$$D(f): \; (x > 0 \;\wedge\; y - x > 1) \;\vee\; (x < 0 \;\wedge\; 0 < y - x < 1)$$

(b)

$$D(f): \; (x^2 + 2x + y^2 \geq 0 \;\wedge\; x^2 - 2x + y^2 > 0) \;\vee\; (x^2 + 2x + y^2 \leq 0 \;\wedge\; x^2 - 2x + y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec (tedy vhodným použitím vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$) můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f): \; \Big((x+1)^2 + y^2 \geq 1 \;\wedge\; (x-1)^2 + y^2 > 1\Big) \;\vee\; \Big((x+1)^2 + y^2 \leq 1 \;\wedge\; (x+1)^2 + y^2 < 1\Big)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f): \; (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \;\wedge\; (x-1)^2 + y^2 > 1$$

1.5 Načrtněte následující množiny:

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 \leq 3 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$.

Řešení:
(a) Po doplnění na čtverec můžeme první nerovnost vyjádřit jako množinu

$$(x + 1)^2 + y^2 \leq 4$$

což je kruh i s okrajem o poloměru 2 a středem v bodě $(-1, 0)$. Podobně druhá nerovnost znamená množinu

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$$

tedy opět kruh i s okrajem o poloměru 2 a středem v bodě $(2, 0)$.

Množina M má tedy tvar "čočky".

(b) I zde použijeme doplnění na čtverec. První nerovnost vyjadřuje dvě oblasti ostře vymezené hyperbolou

$$(x - 1)^2 - y^2 > 1$$

která má střed v bodě $(1, 0)$. Druhá nerovnost je opět kružnice s okrajem o poloměru 2 a středem v bodě $(2, 0)$

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4\ .$$

Množina M má opět tvar podobný "čočce".