

10. cvičení z Matematické analýzy 2

25. - 29. listopadu 2019

10.1 (polární souřadnice)

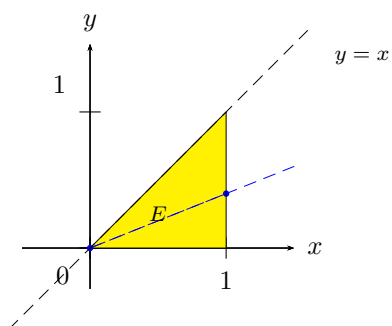
Použitím polárních souřadnic spočítejte

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy dx .$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E : 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$



což je trojúhelník. Množinu U , která parametrizuje $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic

$$\Phi : x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

dostaneme dosazením do nerovnosti pro E

$$0 \leq \underbrace{r \cos \varphi}_{=x} \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \underbrace{r \sin \varphi}_{=y} \leq \underbrace{r \cos \varphi}_{=x} .$$

a úpravě, ale hlavně pomocí náčrtku, jako

$$U : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi} .$$

takže máme

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy dx &= \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x}{x^2 + y^2} dS = \iint_U \cos \varphi dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \cos \varphi dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4} . \end{aligned}$$

10.2 (oblast zadaná v polárních souřadnicích)

Určete velikost plochy E (v kartézských souřadnicích), kterou ohraničuje křivka zadaná pomocí polárních souřadnic

(a) $\varrho = \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle, .$

(b) $\varrho = 1 + \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$

Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích.

Řešení:

(a) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \sin \varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{E=\Phi(U)} 1 \, dS = \iint_U r \, dr \, d\varphi = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin \varphi} r \, dr \right) d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin \varphi$, můžeme body (x, y) křivky parametrizovat pomocí úhlu φ a pak platí, že

$$x = \rho \cos \varphi = \sin \varphi \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi = \sin^2 \varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sin \varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

(b) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 + \sin \varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy se nazývá *kardioida*. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\begin{aligned} \iint_{D=\Phi(U)} 1 \, dS &= \iint_U r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\sin \varphi} r \, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1+\sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \sin \varphi)^2 \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi + 1) \, d\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

10.3 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x, y) dx dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\rho d\varphi$ pro oblasti

- (a) $E = (0, 1)^2$,
 (b) $E : 0 \leq x \leq 1 \ \& \ x^2 \leq y \leq 1$,
 (c) $E : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \ \& \ y \geq 0$.

Řešení:

Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\rho d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ . Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ρ .

(a) Rozsah proměnné φ je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Proměnná ρ pak běží od 0 až po hrany čtverce, které jsou určeny různými předpisy $x = 1$ a $y = 1$. Proto je potřeba E rozdělit podle toho na dva trojúhelníky a každý vyjádřit zvlášť.

Po dosažení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné ρ shora pomocí

$$\rho \cos \varphi = x = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos \varphi}$$

a v druhé

$$\rho \sin \varphi = y = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U : \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \ \& \ 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \varphi} \right) \vee \\ \vee \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \ \& \ 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \varphi} \right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho \cdot f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} \rho \cdot f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho d\varphi .$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Oblast E je potřeba rozdělit na dvě části podle předpisu hraničních křivek - jedna je $x = y^2$ a druhá $y = 1$.

Po dosažení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné ρ shora pomocí

$$\rho \cos \varphi = x = y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow \rho = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

a v druhé

$$\rho \sin \varphi = y = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U : \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \vee \\ \vee \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{1}{\sin \varphi} \right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} \varrho \cdot f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \, d\varrho \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} \varrho \cdot f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \, d\varrho \, d\varphi .$$

(c) Množina E je půlkruh se středem v bodě $(1, 0)$. Střed polárních souřadnic ovšem stále zůstává bod $(0, 0)$. Rozsah proměnné φ tak bude opět $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po kružnici

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x .$$

Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = 2x = 2\varrho \cos \varphi \Rightarrow \varrho = 2 \cos \varphi .$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq 2 \cos \varphi$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \varrho \cdot f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \, d\varrho \, d\varphi .$$

10.4 (obecnější transformace)

Spočítejte integrál

$$\iint_E \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)} \, dx \, dy,$$

kde

$$E : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 .$$

Řešení:

Vzhledem ke tvaru množiny i funkce, kde se vyskytuje výraz $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$, zde budeme používat upravenou transformaci pomocí eliptických souřadnic

$$\Phi : \quad \frac{x}{2} = r \cos \varphi \\ \frac{y}{3} = r \sin \varphi$$

které vzniknou složením polárních souřadnic Ψ a lineární transformace \mathcal{L} , která deformuje jednotlivé

osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \quad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}) := (2\tilde{x}, 3\tilde{y}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Psi} \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}'_{|\Psi}) \cdot (\det \Psi') = 6 \cdot r,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oblast U parametrizující E pomocí souřadnic $\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi$ je tedy

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1$$

protože $\Psi(U)$ je kruh $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 1$, který \mathcal{L} převede na E . Takže máme

$$\begin{aligned} \iint_{E=\Phi(U)} \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)} dx dy &= \iint_U 6r\sqrt{1-r^2} dr d\varphi = 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr d\varphi = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 6 d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr\right) = 12\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = 4\pi. \end{aligned}$$

10.5 (lineární substituce)

S použitím substituce určete

$$\iint_E (x+2y)\sqrt[3]{x-y} dA$$

kde E je omezená oblast určená křivkami $y = x$, $y = x - 1$, $x + 2y = 0$, $x + 2y = 2$.

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad x - 1 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x + 2y \leq 2$$

což ještě prepíšeme jako

$$E: \quad 0 \leq x - y \leq 1, \quad 0 \leq x + 2y \leq 2.$$

Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci Ψ , kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{aligned} u &= x - y \\ v &= x + 2y \end{aligned}$$

Množina

$$U: \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq v \leq 2.$$

zřejmě parametrizuje E jako $E = \Psi(U)$. Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = \frac{1}{\det(\Psi^{-1})'} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3}.$$

Po substituci pak máme

$$\iint_{E=\Psi(U)} (x+2y)\sqrt[3]{x-y} dA = \iint_U v\sqrt[3]{u} \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^1 v\sqrt[3]{u} du dv =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\int_0^2 v \, dv \right) \cdot \left(\int_0^1 \sqrt[3]{u} \, du \right) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left[\frac{3}{4} u^{4/3} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$

10.6 (lineární substitute)

Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} \, dx \, dy.$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq \frac{2}{3}, \quad y \leq x \leq 2 - 2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a $(2, 0)$. Substitute Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body A_1, \dots, A_n je konvexní obal $[A_1, \dots, A_n]_\alpha$ dán jako

$$[A_1, \dots, A_n]_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ \& } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Protože (prosté) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0, 0) = (0, 0)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2, 0)$$

$$\Phi^{-1}(2, 0) = (2, 2).$$

Tedy

$$U: \quad 0 \leq v \leq u, \quad 0 \leq u \leq 2.$$

Dále je $(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} \, dx \, dy &= \iint_{E=\Phi(U)} (x+2y)e^{y-x} \, dS = \iint_U u e^{-v} \cdot \frac{1}{3} \, dS = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^u u e^{-v} \, dv \, du = \frac{1}{3} \int_0^2 u \left[-e^{-v} \right]_{v=0}^{v=u} \, du = \frac{1}{3} \int_0^2 u(1 - e^{-u}) \, du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^2}{2} + (u+1)e^{-u} \right]_0^2 = \\ &= 1 + e^{-2}. \end{aligned}$$

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Necht' $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f \, dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \left(\int_{\text{řez množinou } E \text{ pomocí}} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy,$$

přímky $\{(x, y)\} \times \mathbb{R}$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$. Případně:

$$\iiint_E f \, dV = \int_{\pi_3(E)} \left(\iint_{\text{řez množinou } E \text{ pomocí}} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz$$

roviny $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x, y, z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

10.7 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtete

(a)

$$\iiint_E xyz \, dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)

$$\iiint_E y \, dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

(c)

$$\iiint_E xy \, dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

Řešení:

(i) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \leq z \leq xy, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \iiint_E xyz \, dV &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2} \, dy \, dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11} \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

(ii) Oblast integrace je

$$E : 0 \leq z \leq x + 2y, \quad 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

I zde platí

$$\begin{aligned} \iiint_E y \, dV &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}. \end{aligned}$$

(iii) Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E : 0 \leq z \leq y - x, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \iiint_E xy \, dV &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y y^2x - x^2y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} dy = \left[\frac{y^5}{30} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$