11. cvičení z Matematické analýzy 2

2. - 6. prosince 2019

Příklad **10.7**.

11.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace:

(a)

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:
(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3-3x \quad \& \quad 0 \le z \le 3-3x-y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3-3x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,3)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = 3-3x-y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ a $(0,0,3)$.

Integrál vyjadřuje jeho objem, který si pro procvičení zintegrujeme (i když bychom ho asi uměli spočítat i jinak: *objem* $= \frac{1}{3}$ *podstava*$\times$*výška*). Máme tedy

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3-3x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 (3-3x)^2 - \frac{(3-3x)^2}{2}\, dx =$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x+y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x+y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f \; dV = \iiint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \; d\widetilde{V}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{V}$.

Cylindrické souřadnice mají předpis:

$$\Phi : \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & h \end{array}$$

kde $(r, \varphi, h) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R}$. Dále je

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r \; .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x, y, z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint\limits_{E} v^2(x, y, z) \cdot \varrho(x, y, z) \; dV$$

kde funkce $v(x, y, z)$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

11.2 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(a)

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2) \; dz \; dy \; dx.$$

(b)

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \; dz \; dy \; dx \; .$$

(c)

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2 z \; dz \; dx \; dy.$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad |x| \leq 2 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{4 - x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \leq 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \leq 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \leq r \leq h \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r\ dV = \int_0^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dh = 2\pi \int_0^2 \int_0^h r^3 \ \ dr\ dh =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^2 h^4 \ \ dh = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x,y,z)=1$ vzhledem k jeho ose symetrie (což je osa z).

(b) Oblast E je popsána jako

$$E: \ -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \leq 1 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \leq 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leq 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E=\Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad r^2 \leq h \leq 2-r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^3 \cdot r \; d\varphi \; dh \; dr = \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{2-r^2} \int\limits_0^{2\pi} r^4 \; d\varphi \; dh \; dr = 2\pi \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{2-r^2} r^4 \; dh \; dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 r^4(1-r^2) \;\; dr = 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{35}\pi \; .$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti “čočky” E s hustotou $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ vzhledem k ose z.

(c) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le y \le 1 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$$

neboli

$$E: \quad 0 \le x \quad \& \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \; .$$

Třetí z podmínek nám dává nerovnost $x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2}$, ze které plyne podmínka $x^2+y^2 \le 1$, kterou tímto můžeme také vynechat. Dostáváme tak jednodušší popis

$$E: \quad 0 \le x \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$$

což je prostor ležící mezi rotačním paraboloidem $z = x^2+y^2$ a kuželem $z^2 = x^2+y^2$ a to celé ještě v poloprostoru určeném $x \ge 0$. Průmět $\pi_{1,2}(E)$ oblasti E do roviny xy je polovina kruhu (určená pomocí $x \ge 0$) o průměru 1. Tento průmět už máme zapsaný v jednom z ekvivalentních vyjádření E a sice jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \quad \& \quad x^2+y^2 \le 1$$

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le r \; .$$

Pak můžeme psát

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2z \; dz \; dx \; dy = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} xy^2z \; dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^3 h \cos\varphi \sin^2\varphi \cdot r \; d\varphi \; dh \; dr = \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{r} r^3 h \underbrace{\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \; d\varphi \right)}_{=\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}} dh \; dr =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{r} \frac{2}{3} r^3 h \; dh \; dr = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 r^3 \left[h^2\right]_{h=r^2}^{h=r} \; dr = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 r^3(r^2-r^4) \; dr = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{72} \; .$$

11.3 (cylindrické souřadnice)
Určete moment setrvačnosti J tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2 \;\;\&\;\; x^2+y^2 \le 1 \;\;\&\;\; x,y,z \ge 0.$$

vzhledem k ose otáčení z.

Řešení:

Těleso E je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$, válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule a 1. oktantu (tj. osminy prostoru se všemi souřadnicemi nezápornými). Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Po dosazení do nerovností máme

$$r^2+h^2 \le 2, \quad r^2 \le 1, \quad h \ge 0$$

přičemž rozsah úhlu je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le h \le \sqrt{2-r^2}\ .$$

Pak dostáváme

$$J = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} x^2+y^2 \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{1} \int\limits_0^{\sqrt{2-r^2}} r^2 \cdot r \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{1} r^3\sqrt{2-r^2}\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int\limits_0^{1} r^3\sqrt{2-r^2}\,\mathrm{d}r \right) = \left\{ \begin{smallmatrix} u=2-r^2 \\ du=-2rdr \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_2^{1} -\tfrac{1}{2}(2-u)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \int\limits_1^{2} u^{1/2} - \tfrac{1}{2}u^{3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - \tfrac{1}{5}u^{5/2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \pi\left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{7}{30} \right)\ .$$

Sférické souřadnice mají předpis:.

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r,\varphi,\vartheta) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2: \begin{array}{rcl} x &=& \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y &=& \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z &=& \tilde{z} \end{array}, \quad \Phi_1: \begin{array}{rcl} \tilde{r} &=& r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} &=& \varphi \\ \tilde{z} &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det\Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta)\cdot r = r^2\sin\vartheta.$$

11.4 (sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad \& \quad z\cdot\tan(\alpha_0) \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1\ dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin\vartheta\ dV = \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta\ dr = 2\pi(1-\cos\alpha_0)\int_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{E=\Psi(U)} z\ dV = \frac{1}{m}\iiint\limits_{U} r^3\cos\vartheta\sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = \frac{1}{m}\int_0^R\int_0^{\alpha_0}\int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= \frac{\pi}{m}\left(\int_0^R r^3\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{\alpha_0}\sin 2\vartheta\ d\vartheta\right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha_0}{1-\cos\alpha_0} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha_0).$$

11.5 (sférické souřadnice)
Vypočtěte

$$\iiint\limits_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\ dV,$$

kde $E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Řešení:
Pomocí sférických souřadnic Ψ si zvolíme parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi\ .$$

Takže můžeme psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}}\, dV = \iiint\limits_{U} \frac{r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\, dV =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\, d\varphi\, d\vartheta\, dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\, d\vartheta\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[r\frac{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi \int_0^1 r\Big(\sqrt{r^2+4r+4} - \sqrt{r^2-4r+4}\Big)\, dr =$$

$$= \pi \int_0^1 r\Big(|r+2| - |r-2|\Big)\, dr = \pi \int_0^1 r\Big(r+2-(2-r)\Big)\, dr = 2\pi \int_0^1 r^2\, dr = \frac{2}{3}\pi.$$

11.6 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint\limits_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV$$

kde

$$E: \quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2 \ \ \& \ \ z \ge 0\ .$$

Řešení:
Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a parametrizace $E=\Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 1 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin\vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV = \iiint\limits_U r\sin\vartheta\cos\varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 e^{r^4}\, dr\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi\right)}_{0} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\right) = 0\ .$$

11.7 (obecnější sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \& \quad x, y, z \ge 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x/a & = & (r \sin\vartheta)\cos\varphi \\ y/b & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z/c & = & r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint_E 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| \; dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 \; dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr\cos\vartheta) \cdot (abc\; r^2 \sin\vartheta) \; dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \right) = \frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

11.8 Najděte tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$, která je zadána implicitně rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \;\;\&\;\; x^2 + y^2 = 2z$$

v okolí bodu $A = (1, 1, 1)$.

Řešení:
Křivka $\mathcal{C}$ je zadána implicitně jako průnik dvou ploch v okolí bodu A. Jestliže tyto dvě plochy mají v bodě A různé tečné roviny neboli, odpovídající gradienty v A jsou lineárně nezávislé, pak tečna přímka p v bodě A k $\mathcal{C}$ bude průnikem těchto tečných rovin. A tudíž směrový vektor $\vec{v}$ tečné přímky p v bodě A bude kolmý na oba gradienty.

Tedy pro $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ a $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$ je tečný vektor $\vec{v}$ křivky $\mathcal{C}$ v bodě A kolmý na

$$\text{grad } g_1(A) = (2x, 2y, 2z)_A = (2, 2, 2)$$

a

$$\text{grad } g_2(A) = (2x, 2y, -2)_A = (2, 2, -2)$$

tedy je řešením soustavy (bez pravé strany) s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Nenulové řešení je např. $\vec{v} = (1, -1, 0)$, což je odpovídající tečný vektor (všechny ostatní jsou jeho násobky).

Ještě je dobré si všimnout, že podmínky

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \;\;\&\;\; x^2 + y^2 = 2z$$

vyjadřují průnik koule s rotačním hyperboloidem a lze je ekvivalentně vyjádřit jako

$$\underbrace{2z + z^2 - 3}_{(z+3)(z-1)} = 0 \;\;\&\;\; x^2 + y^2 = 2z$$

neboli (protože musí být $2z = x^2 + y^2 \geq 0$) jako

$$z = 1 \;\;\&\;\; x^2 + y^2 = 2\,.$$

Jde tedy o kružnici v rovině $z = 1$.