12. cvičení z Matematické analýzy 2

9. - 13. prosince 2019

Integrál z funkce f podél křivky $\mathcal{C}$ spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)|| \, dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ platí, že:
  φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho vyjímek),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a + b - t) \ \text{ pro } \ t \in \langle a, b\rangle \ .$$

12.1 (délka křivky)

Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi : \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:

Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)|| \, dt \quad \Big(= \int_\Gamma 1 \, ds\Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t, \ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \, ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = \Big[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix} \Big] = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)} \, du =$$

$$= \Big\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \Big\} = 4 \int_0^{\pi} \sin u \, du = 8 \ .$$

12.2 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: úsečka jdoucí z bodu $(1,0)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0,1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,2)$;
- $\mathcal{C}_3$: úsečka jdoucí z bodu $(0,2)$ do bodu $(1,0)$.

Řešení:

- parametrizace $\mathcal{C}_1$: $\varphi_1(t) = (\underbrace{1-t}_{x}, \underbrace{0}_{y})$, $t \in \langle 0,1\rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-1,0) \quad \text{a} \quad ||\varphi_1'(t)|| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} (x+y)\ ds = \int\limits_0^1 (x+y)_{|\varphi_1(t)} \cdot ||\varphi_1'(t)||\ dt = \int\limits_0^1 1-t\ dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

- parametrizace $\mathcal{C}_2$: Křivka splňuje rovnici $x^2+(y-1)^2 = 1$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_2: \quad x = \cos t, \quad y = 1+\sin t \ \text{ pro } \ \tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{3\pi}{2}.$$

Tato parametrizace však probíhá křivku v opačném směru! To ale nevadí, protože integrál z funkce nezávisí na volbě orientace.

$$\varphi_2'(t): \quad x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t \quad \text{a} \quad ||\varphi_2'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t} = 1.$$

Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} (x+y)\ ds = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x+y)_{|\varphi_2(t)} \cdot ||\varphi_2'(t)||\ dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1+\sin t+\cos t\ dt = \pi+2\ .$$

- parametrizace $\mathcal{C}_3$: $\varphi_3(t) = (0,2)+t(1,-2) = (t, 2-2t), \quad t \in \langle 0,1\rangle$

$$\varphi_3'(t) = (1,-2) \quad \text{a} \quad ||\varphi_3'(t)|| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_3} (x+y)\ ds = \int\limits_0^1 (x+y)_{|\varphi_3(t)} \cdot ||\varphi_3'(t)||\ dt = \int\limits_0^1 (2-t)\sqrt{5}\ dt = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ .$$

Celkem tedy máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\mathcal{C}_i} (x+y)\, ds = \pi + 3 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

12.3 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(-1, 2)$.

Řešení:
• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: \quad x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t, \quad y=\tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{pro} \quad 0\le t\le \pi.$$

$$\varphi_1'(t): \quad x'(t)=-\tfrac{1}{2}\sin t, \quad y'(t)=\tfrac{1}{2}\cos t \quad \text{ a } \quad ||\varphi_1'(t)||=\sqrt{(-\tfrac{1}{2}\sin t)^2+\tfrac{1}{4}\cos^2 t}=\tfrac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} \sqrt{x^2+y^2}\; ds = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_1(t)} \cdot ||\varphi_1'(t)||\; dt = \int\limits_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t)^2+(\tfrac{1}{2}\sin)^2 t}\; dt =$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\; dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix} \right] = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(2u)}\; du =$$

$$= \left\{ \cos(2u)=\cos^2 u-\sin^2 u \right\} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\; du = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t)=(0,0)+t(-1,2)=(-t,2t), \quad t\in\langle 0,1\rangle$

$$\varphi_2'(t)=(-1,2) \quad \text{ a } \quad ||\varphi_2'(t)||=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} \sqrt{x^2+y^2}\; ds = \int\limits_0^{1} \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_2(t)} \cdot ||\varphi_2'(t)||\; dt = \int\limits_0^{1} 5t\; dt = \frac{5}{2}\ .$$

Celkem tedy máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathcal{C}_i} (x+y)\, ds = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$$

12.4 (křivkový integrál z funkce)
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int\limits_{\mathcal{C}} xy\; ds,$$

kde

$$\mathcal{C}: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ \& \ \ x, y \geq 0$$

s parametry $a \neq b$.

Řešení:
Křivka je jedna čtvrtina elipsy a proto zvolíme na parametrizaci upravené polární souřadnice

$$\varphi: \quad \begin{aligned} \tfrac{x}{a} &= \cos t \\ \tfrac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \Big(-a \sin t, \ b \cos t \Big)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \ .$$

Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}} xy \ ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \ dt = \left[\begin{smallmatrix} u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ du = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t \ dt \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int\limits_{b^2}^{a^2} \sqrt{u} \ du = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} \ .$$

Připomenutí: Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané orientované křivky $\mathcal{C}$ počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky $\mathcal{C}$).
Jestliže parametrizace $\varphi : \langle a, b \rangle \to \mathcal{C}$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{\mathcal{C}} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int\limits_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \ dt \ .$$

Pokud parametrizace φ je v opačném směru než námi zvolená orientace $\mathcal{C}$, pak máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int\limits_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \ dt \ .$$

12.5 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y \ dx - x \ dy$$

kde $\mathcal{C}$ je asteroida určená parametrizací

$$\varphi: \quad x = a \cos^3 t \ \ \& \ \ y = a \sin^3 t \ \ \& \ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientaci danou touto parametrizací. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

Řešení:
Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t \Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(y,\ -x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} (a\sin^3 t, -a\cos^3 t) \cdot \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$= -3a^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = -\frac{3}{4}a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = -\frac{3}{4}\pi a^2.$$

12.6 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (2a - y)\ dx + x\ dy$$

pro oblouk cykloidy $\mathcal{C}$ dané parametrizací

$$\varphi: \quad x = a(t - \sin t) \ \ \& \ \ y = a(1 - \cos t) \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientaci danou touto parametrizací. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a, která se valí bez tření po přímce.).

Řešení:
Máme

$$\varphi'(t) = \Big(a(1 - \cos t),\ a\sin t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(2a - y,\ x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} \Big(a(1 + \cos t),\ a(t - \sin t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t\ dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} t\sin t\ dt = a^2 \Big[-t\cos t\Big]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos t\ dt = -2\pi a^2.$$

12.7 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\ dx - x^2\ dy$$

kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: úsečka jdoucí z bodu $(2,-1)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: část paraboly o rovnici $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(2,1)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (2xy,\ -x^2)$.

- parametrizace $\mathcal{C}_1$: $\varphi_1(t) = (2,-1) + t(-2,1) = (\underbrace{2-2t}_{x}, \underbrace{t-1}_{y}), \quad t \in \langle 0,1\rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-2,1)\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|_{\varphi_1(t)}} \cdot \varphi_1'(t)\ dt = \int_0^1 \Big(-4(t-1)^2,\ -4(t-1)^2\Big) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= 4\int_0^1 (t-1)^2\ dt = 4\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

- parametrizace $\mathcal{C}_2$: Křivku můžeme parametrizovat např. pomocí souřadnice y:

$$\varphi_2:\quad x = 2t^2,\quad y = t \ \text{ pro }\ 0 \le t \le 1.$$

$$\varphi_2'(t):\quad x'(t) = 4t,\quad y'(t) = 1\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|_{\varphi_2(t)}} \cdot \varphi_2'(t)\ dt = \int_0^1 \Big(4t^3,\ -4t^4\Big) \cdot \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix}\ dt = 12\int_0^1 t^4\ dt = \frac{12}{5}$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,ds = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{C}_i} (x+y)\,ds = \frac{4}{3} + \frac{12}{5} = \frac{56}{15}$$

12.8 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}:\quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny. Je to tedy elipsa a její orientace je určena pomocí průmětu $\mathcal{C}$ do roviny xy, v němž má mít tento průmět kladnou orientaci (tím je myšleno to “při pohledu shora”, tj. když se na křivku budeme dívat tak, aby osa z směřovala k nám).

Průmět $\mathcal{C}$ do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$ a jeho kladná orientace je určena obvyklou parametrizaci

$$x(t) = \cos t\ , \quad y(t) = \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\ .$$

Tím je určena i poslední složka, tj.

$$z(t) = 1 - x(t) = 1 - \cos t\ .$$

Pro parametrizaci jsme zde vlastně využili válcové souřadnice, které po dosazení do rovnosti určujících $\mathcal{C}$ poskytnou vztahy mezi jednotlivými parametry (výsledkem musí být jen jeden volný parametr, protože křivka je jednodimenzionální objekt).

Pro výpočet můžeme využít také formu, ve které je integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int_0^{2\pi} \Big(y(t) \cdot \frac{dx}{dt} + z(t) \cdot \frac{dy}{dt} + x(t) \cdot \frac{dz}{dt} \Big)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sin t \cdot (-\sin t) + (1 - \cos t) \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t \Big)\ dt = \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t + \cos t \cdot \sin t)\ dt =$$

$$= -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\ dt}_{=0} = -2\pi\ .$$

12.9 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2 + 1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad x = y \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací od bodu $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2 + 1,\ 2z,\ x^2)$. Křivka představuje průnik horní části sféry a roviny kolmé k základně. Je to tedy polovina kružnice. Ukážeme si na ní, jak můžeme využívat známých transformací souřadnic pro nalezení parametrizaci křivek.

Vzhledem k rovnicím určujícím naší křivku $\mathcal{C}$ můžeme dobře využít sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu pro $\mathcal{C}$ dostaneme

$$r^2 = 1 \quad \& \quad r \sin\vartheta(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \quad \& \quad r\cos\vartheta \geq 0$$

Vzhledem ke geometrickému náhledu a těmto rovnicím si vezmeme tuto volbu pro jednotlivé parametry:

$$r = 1 \quad \& \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$$

Může se zdát zvláštní brát si úhel ϑ i pro záporné hodnoty, ale vzhledem k tomu, že se měří od kladné části osy z a úhel φ máme teď pevně zvolený, to je v pořádku. Dostáváme tak parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\ , \quad y(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\ , \quad z(\vartheta) = \cos\vartheta \quad \text{pro} \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$$

kterou bychom mohli koneckonců snadno dostat i z geometrického náhledu nebo při dosazení $x = y$ do rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tj. zparametrizováním elipsy $2y^2 + z^2 = 1$). Tato parametrizace odpovídá i zvolené orientaci $\mathcal{C}$.

Pro výpočet opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((y^2(\vartheta)+1)\cdot\frac{dx}{d\vartheta} + 2z(\vartheta)\cdot\frac{dy}{d\vartheta} + x^2(\vartheta)\cdot\frac{dz}{d\vartheta}\Big)\ d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta + 1)\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + 2\cos\vartheta\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta\cdot\sin\vartheta\Big)\ d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta+1)\cos\vartheta\ d\vartheta + \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2\vartheta}_{\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}}\ d\vartheta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{\text{lichá funkce}}\ d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\tfrac{1}{6}\sin^3\vartheta + \sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

12.10 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \& \quad x^2+y^2 = x \quad \& \quad z \ge 0$$

je tzv. *Vivianiho* křivka (přesněji, jedna její část) s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2,\ z^2,\ x^2)$. Rovnice $x^2+y^2 = x$ je to samé jako $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik horní části sféry (o poloměru 1) s válcem jehož poloměr je $\frac{1}{2}$ a osa sféry leží v plášti válce. Parametrizací můžeme udělat vícero způsoby:

- pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \cos\varphi$, $h = |\sin\varphi|$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = \cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = |\sin\varphi| \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

- pomocí posunutých válcových souřadnic (do osy výše zmíněného válce):

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$\frac{1}{4} + r\cos\alpha + r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \frac{1}{2}$, $h = \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot\frac{\alpha}{2})}{2}} = \sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = \sin(\frac{\alpha}{2})$ a $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)\ , \quad y(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\ , \quad z(\alpha) = \sin(\tfrac{\alpha}{2}) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Pro výpočet zvolíme třeba tu druhou parametrizaci. Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz = \int_0^{2\pi} \Big(y^2(\alpha)\cdot\frac{dx}{d\alpha} + z^2(\alpha)\cdot\frac{dy}{d\alpha} + x^2(\alpha)\cdot\frac{dz}{d\alpha}\Big)\ d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-\tfrac{1}{8}\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2(\tfrac{\alpha}{2})\cdot\cos\alpha + \tfrac{1}{8}(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos(\tfrac{\alpha}{2})\Big)\ d\alpha =$$

$$= -\tfrac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\alpha)\cdot\sin\alpha\ d\alpha + \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sin^2(\tfrac{\alpha}{2})\cdot\cos\alpha + \tfrac{1}{8}(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos(\tfrac{\alpha}{2})\ d\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{8}\Big[\cos\alpha - \tfrac{1}{3}\cos^3\alpha\Big]_0^{2\pi} + \left\{ \begin{array}{c} \text{substituce:} \\ 2t = \alpha \\ 2dt = d\alpha \end{array} \right\} =$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2 t\cdot\cos(2t)}_{(1-\cos^2\alpha)(2\cos^2\alpha-1)} + \underbrace{\big(\tfrac{1+\cos(2t)}{2}\big)^2}_{(\cos^2 t)^2}\cdot\cos t\ dt = \int_0^{\pi} \cos^5\alpha - 2\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha - 1\ dt =$$

$$= \{\text{viz níže}\} = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0 + (-2)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi - \pi = -\frac{\pi}{4}\ .$$

Kde jsme pro $n \geq 2$ spočítali integrály

$$A_n := \int_0^{\pi} \cos t \cdot \cos^{n-1} t \; dt = \Big[\sin t \cdot \cos^{n-1} t\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (n-1) \cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t \; dt =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi} \cos^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t) \; dt = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ a $A_1 = 0$ a $A_0 = \pi$. Neboli, pro liché n je $\int_0^{\pi} \cos^n t \; dt = 0$, což je vidět i z grafu funkce.

12.11 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y \; dx + z \; dy + x \; dz$$

kde

$$\mathcal{C} : \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y, \; z, \; x)$. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce. Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r \cos \varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2 \cos \varphi$, $h = r = 2 \cos \varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C} : \quad x(\varphi) = 2 \cos^2 \varphi \;, \quad y(\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi \;, \quad z(\varphi) = 2 \cos \varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y \; dx + z \; dy + x \; dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(y(\varphi) \cdot \frac{dx}{d\varphi} + z(\varphi) \cdot \frac{dy}{d\varphi} + x(\varphi) \cdot \frac{dz}{d\varphi} \Big) \; d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-2 \cdot \underbrace{4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}_{= \sin^2(2\varphi) = \frac{1-\cos(4\varphi)}{2}} + 4 \cos \varphi \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}_{= 1 - 2\sin^2 \varphi} - 4 \underbrace{\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}_{\text{lichá funkce}} \Big) \; d\varphi =$$

$$= -2\Big[\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{1}{8}\sin(4\varphi)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4\Big[\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

Připomenutí: Práce síly $\vec{F}$ v *oblasti* U (tj. otevřené množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = \int_A^B \operatorname{grad}(f)\ d\vec{s} = f(B) - f(A)\ .$$

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1\ d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

12.12 (konzervativní pole, potenciál)

Dokažte, že následující pole jsou konzervativní, najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y,\ \ y^2 + x,\ \ ze^z)$, $A = (0,1,0)$, $B = (-1,1,0)$.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (y + z,\ \ x + z,\ \ x + y)$, $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,1)$.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2},\ \ -\frac{1}{x+z},\ \ \frac{y}{(x+z)^2}\right)$, $A = (1,1,2)$, $B = (1,0,0)$.

(iv) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{z},\ \ -\frac{3}{z},\ \ \frac{3y-x}{z^2}\right)$, $A = (1,0,1)$, $B = (-1,1,2)$.

Řešení:

(i) Po dosazení máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0-0,\quad 0-0,\quad 1-1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z\ . \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

A jak nám tento postup rozhodne o případné neexistenci potenciálu? Pokud po dosazení průběžného tvaru potenciálu do další rovnice zjistíme, že tato nová rovnice nemá řešení, pak potenciál nemůže existovat. Jak by k něčemu takovému mohlo dojít? Předpokládejme např., že druhá složka pole je trochu jiná, dejme tomu, že je tvaru $F_2 = y^2 - x$. Z první rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = x^2 + y$ opět dostaneme, ze potenciál musí být tvaru $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)$ a když ho nyní dosadíme do druhé rovnice $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = y^2 - x$ (se změněnou složkou F_2) tak dostaneme, že

$$y^2 - x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy
$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2 - 2x.$$
Nalevo je funkce závislá pouze na y a z, ale už ne na x, zatímco napravo je funkce závislá také na x. Takovouto rovnici nelze splnit, tedy potenciál v tomto případě neexistuje (bez ohledu na to, jaká je třetí složka F_3 našeho pole).

Práce pole pak je
$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = -2 - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = -\frac{4}{3}\ .$$

- -

(ii) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f máme
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y+z && (4)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x+z && (5)\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x+y\ . && (6) \end{aligned}$$

Z první rovnice máme:
$$f(x,y,z) = \int y+z\ dx = xy + xz + C(y,z),$$
kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice
$$x + z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy + xz + C(y,z)\Big) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$
tedy
$$\frac{\partial C}{\partial y} = z.$$
Dostáváme $C(y,z) = \int z\ dy = yz + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím
$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + D(z)$$
a dosazením do poslední rovnice máme
$$x + y = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(xy + xz + yz + D(z)\Big) = x + y + \frac{\partial D}{\partial z}.$$
Takže $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$, a tudíž $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál
$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + K.$$

Práce pole pak je
$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 3 - 0 = 3\ .$$

- -

(iii) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}): \quad x+z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z $\mathbb{R}^3$ vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Jen pro procvičení si spočítáme rotaci, která nám ale pro nalezení potenciálu nepomůže. Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}, \ \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3}, \ \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2} \right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+z} \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} \quad . \tag{9}$$

Začneme třeba druhou rovnici:

$$f(x,y,z) = \int -\frac{1}{x+z}\ dy = -\frac{y}{x+z} + C(x,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{x+z} + C(x,z) \right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x,z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x+z} + D(x) \right) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2\ dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (1,1,2)$ a $B = (1,0,0)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty $x+z$, tedy jako

$$P_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z > 0\}$$
$$P_- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B:

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1,0,0) - f(1,1,2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ .$$

- -

(iv) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}): \quad z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z $\mathbb{R}^3$ vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z} \tag{10}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{z} \tag{11}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y-x}{z^2}\ . \tag{12}$$

Začneme třeba první rovnici:

$$f(x,y,z) = \int \frac{1}{z}\, dx = \frac{x}{z} + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z} + C(y,z)\right) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int -\frac{3}{z}\, dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = \frac{x-3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y-x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-3y}{z} + D(z)\right) = -\frac{x-3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x-3y}{z} + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (-1, 1, 2)$ a $B = (1, 0, 1)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty z, tedy jako

$$P_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$
$$P_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B:

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1, 1, 2) - f(1, 0, 1) = 2 - 1 = 1 \ .$$