13. cvičení z Matematické analýzy 2

16. - 20. prosince 2019

Připomenutí: Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako
$$\iint\limits_M f \; dS = \iint\limits_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS \; ,$$
kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

13.1 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)
$$\iint\limits_M z \; dS,$$
kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

(ii)
$$\iint\limits_M yz \; dS,$$
kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$ a $u^2 + v^2 \leq 1$.

(iii)
$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS,$$
kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

(iv)
$$\iint\limits_M z^2 \; dS,$$
kde M je část povrchu koule $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$.

Řešení:
(i) Plocha je určena jako
$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x + 1.$$
Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako
$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$
s definičním oborem
$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1 + \cos\varphi.$$
Máme
$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad 0) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial z} &= (\quad 0, \quad 0, \quad 1) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \tfrac{\partial \Phi}{\partial z} &= (\quad \cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad 0) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Takže pro funkci $f(x,y,z) = z$ máme

$$\iint\limits_M f \; dS = \iint\limits_U z \; dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1+\cos\varphi} z \; dz \; d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2} \; d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2} \right) \; d\varphi =$$

$$= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

- -

(ii) Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U: \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (uv, u+v, u-v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u + v$ a $z = u - v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v+u, v-u) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2+v^2)+4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint\limits_M yz \; dS = \iint\limits_U (u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4} \; dS = \left[\begin{smallmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2+4} \; dr \; d\varphi = \left(\int\limits_0^3 r^3 \sqrt{2r^2+4} \; dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi \; d\varphi \right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u + v$ a $z = u - v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2 - z^2}{4}$ a $1 \geq u^2 + v^2 = \frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \qquad y^2 + z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

- -

(iii) Plochu $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;\&\; z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi,\quad 2\sin\vartheta\cos\varphi,\quad 0\quad)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = (\ \ 2\cos\vartheta\cos\varphi,\quad 2\cos\vartheta\sin\varphi,\quad -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2z + y^2z\ dS = \iint\limits_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)\cdot 4|\sin\vartheta|\ dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\Big[8\sin^4\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

- -

(iv) Plocha $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\ \&\ z\geq 0\}$ je jedna osmina sféry a zparametrizujeme ji proto pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi,\vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \sin\vartheta\sin\varphi,\quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U:\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\quad\&\quad 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \sin\vartheta\cos\varphi,\quad 0\quad)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = (\ \ \cos\vartheta\cos\varphi,\quad \cos\vartheta\sin\varphi,\quad -\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si opět zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = |\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M z^2\ dS = \iint\limits_U \left(\sin^2\vartheta\right)\cdot|\sin\vartheta|\ dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\ d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\ d\vartheta = \frac{\pi}{2}\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}\ .$$

Připomenutí: Tok vektorového pole $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dS \ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

13.2 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (0,\ x,\ -y)$ a M je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ s horní orientací.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y^2,\ yz)$ a M je na plášti kuželu $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ pro $0 \leq z \leq 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(iv) $\vec{F}(x,y,z) = (e^y,\ ye^x,\ x^2 y)$ a M je částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ s horní orientací.

Řešení:
(i) Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1 - x^2 - y^2\Big)$$

s definičním oborem

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -2x\big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(2x, \quad 2y, \quad 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint\limits_U (x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint\limits_U (1 + x^2 + y^2)\ dS = \begin{bmatrix} \scriptstyle x = r\cos\varphi \\ \scriptstyle y = r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0 \leq r \leq 1 \\ \scriptstyle 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 (1 + r^2) r\ dr d\varphi = \left(\int\limits_0^1 (1 + r^2) r\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(1+r^2)^2}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

- -

(ii) Plochu M zparametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= \big(-\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \big(\cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a odsud je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \big(-\sin^2\vartheta\cos\varphi, \ -\sin^2\vartheta\sin\varphi, \ -\sin\vartheta\cos\vartheta \big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je záporná (na vnitřku definičního oboru), takže toto pole je orientované opačně k zadání. Takže máme

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_U \vec{F}\big(\Phi(\varphi,\vartheta)\big) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) dS \ =$$

$$= -\iint_U (0, \sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi) \cdot \begin{pmatrix} -\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \cdot (\sin\varphi\cos\varphi) - (\sin^2\vartheta\cos\vartheta) \cdot \sin\varphi \ d\vartheta \ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \ d\vartheta \right) \cdot \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(2\varphi)}{2} \ d\varphi}_{=0} \right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\cos\vartheta \ d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \ d\varphi \right) =$$

$$= 0 - \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \big[-\cos\varphi \big]_0^{\pi} = -\frac{2}{3} \ .$$

- -

(iii) Plochu M je zadaná také jako graf funkce $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ pro $x^2 + y^2 \leq 1$. Můžeme ji proto takto přirozeně zparametrizovat:

$$\Phi(x, y) = \left(x, \ y, \ 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Všimněme si, že v bodě $(0,0)$ nemá tato funkce derivaci (je to vrchol kužele). Ale protože jde jen o jeden bod, nemá to vliv na integrál.

Dále máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1\Big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint_U \big(x, y^2, y(1-\sqrt{x^2+y^2})\big)\cdot\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint_U \frac{x^2+y^3-y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\ dS = \iint_U \frac{x^2(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\ dS =$$

$$= \begin{bmatrix} {\scriptstyle x=r\cos\varphi} \\ {\scriptstyle y=r\sin\varphi} \\ {\scriptstyle 0\le r\le 1} \\ {\scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r\cos^2\varphi(1-r\sin\varphi)+r\sin\varphi\Big) r\ dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\sin\varphi\ drd\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi+\sin\varphi}{3} - \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{4}\ d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{\cos^3\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}\ .$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2+y^2\le 1$, $z=0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

- -

(iv) Plocha M je grafem funkce $f(x,y)=x^2+y^2$, takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0\le x\le 1 \ \ \& \ \ 0\le y\le 1\ .$$

Máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = (1,0,2x)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (0,1,2y)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (-2x,-2y,1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru." Máme tak

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_U \left(e^y, ye^x, x^2y\right) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \, dS =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(-2xe^y - 2y^2e^x + x^2y\right) \, dx \, dy = \int_0^1 -e^y - 2y^2(e^1 - 1) + \frac{y}{3} \, dy = -(e-1) - \frac{2}{3}(e-1) + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{5}{3}e \; .$$